

תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

25 במאי 2017

מטרתנו היא להראות את המשפט החשוב הבא:

משפט 0.1 נניח כי f גזירה בתחום U . אזי f אנליטית בתחום U , כלומר סביב כל $z_0 \in U$ אפשר לפתח אותה לטור חזקות (עם רדיוס התכנסות חיובי).

לשם הוכחת המשפט, נחזור לסוף הוכחת משפט גורסה - אם f גזירה אז $\int_{\Delta} f = 0$ לכל מסילת משולש $\Delta \subseteq U$ (ולכן אם U קמור אז יש לה פונקציה קדומה). הוכחנו לזה תוספת חשובה, שבפרט גררה שאם בנקודה מסויימת f רציפה ולא דווקא גזירה, עדיין האינטגרל מתאפס על כל משולש.

השלב הבא הוא פיתוח נוסחת קושי למשולש - בהינתן f גזירה בתחום U ונקודה $z_0 \in U$, נשים את z_0 במרכז משולש, נאמר שווה צלעות, שמוכל בתוך U . מפתחים את נוסחת קושי למשולש בדיוק כפי שעשינו בעבר - הגדרנו לכל z בתוך המשולש פונקציה

$$g_z(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & w \neq z \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

על המשולש. זוהי פונקציה של w שהיא גזירה בסביבה של המשולש, ובנקודה $w = z$ היא רציפה. לכן משפט גורסה עם התוספת מבטיחים כי

$$\int_{\Delta} g_z(w) dw = 0$$

ומכאן ישירות מההגדרה נקבל

$$2\pi i \cdot f(z) = 2\pi i f(z) \text{Ind}_{\Delta}(z) = f(z) \int_{\Delta} \frac{1}{w-z} dw = \int_{\Delta} \frac{f(z)}{w-z} dw = \int_{\Delta} \frac{f(w)}{w-z} dw$$
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

אנחנו נשתמש בזה ונראה שאגף ימין במשוואה האחרונה הוא פונקציה אנליטית של z . לשם הפשטות, נניח תחילה כי $z_0 = 0$, כלומר רוצים להראות כי f אנליטית בסביבת 0. לשם כך נכתוב מחדש:

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w} \frac{1}{1-\frac{z}{w}}$$

z קרוב מאוד לאפס (אנחנו קובעים כמה), w על המסילה הקבועה שלנו, ולכן $\left|\frac{z}{w}\right| < 1$ אוניפורמית לכל w בשפת המשולש. לכן נוכל לפתח:

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w} \frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \frac{f(w)}{w} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w^{n+1}} z^n$$

הטור הזה מתכנס במידה שווה על w לכל בחירה קבועה של z , ולכן נוכל לבצע אינטגרציה על w ולקבל

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \right) \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

וקיבלנו את f כטור חזקות במשתנה z - כלומר זו פונקציה אנליטית סביב $z_0 = 0$. כמובן שלכל טור חזקות ובפרט לזה מתקיים

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

ביחד נקבל

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw$$

נעת נחזור למקרה של z_0 כללי. מחליפים בחישוב במכנה את w עם $w - z_0$, ואת z עם $z - z_0$. כלומר

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w-z_0} \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n$$

ואז

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\Delta} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right) (z-z_0)^n$$

ואז גם

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

כדי לבצע את טיעון האינטגרציה איבר איבר, באופן כללי, יש לעבוד עם z בתוך קבוצה קומפקטית K כך שעבורה קיים $q < 1$, שהוא פונקציה של z , כך שלכל $z \in K$ ולכל w בשפת המשולש, מתקיים

$$\left| \frac{z-z_0}{w-z_0} \right| < q$$

אזי לכל $z \in K$ יש התכנסות במידה שווה על w בשפת המשולש. נשים לב שבאופן כללי קיבלנו את הנוסחה הבאה:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

זה מסיים את הוכחת המשפט על זירות שגוררת אנליטיות. אנחנו רוצים כעת להבין את רדיוס ההתכנסות של טור החזקות המתאר את f בסביבת z_0 . ההוכחה נותנת שלכל קבוצה K בה קיים קבוע $q(K) < 1$ כך שמתקיים

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| < q$$

לכל $z \in K, w \in \partial\Delta$, הטור מתכנס עבור $z \in K$. נשאף לקחת משולשים כמה שיותר גדולים, כדי לקבל K גדולה כמה שאפשר. כיוון שלשאלת רדיוס ההתכנסות של טור החקות יש סימטריה מעגלית טבעית, אפשר להחליף (וטבעי להחליף) את המשולש במעגל סביב z_0 . אנחנו יודעים שמעגל ומשולש הומוטופיים, ולכן כל הדיון שעשינו כאן תקף גם לאינטגרלים על מעגלים.

מסקנה 0.2 אם $B_R(z_0) \subseteq U$ אזי רדיוס ההתכנסות של הטור המתאר את f סביב z_0 הוא לפחות R .

הוכחה: לכל $\varepsilon > 0$ ניקח במקום משולש מעגל $|z - z_0| = R$, ומביטים בנקודה z בתוך הקבוצה הקומפקטית $K = \{|z - z_0| \leq R - \varepsilon\}$. עליה מתקיים

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| \leq \frac{R - \varepsilon}{R} = 1 - \frac{\varepsilon}{R} = q$$

לכן ניתן להמשיך את ההוכחה כמו קודם. הראינו שהרדיוס הוא לפחות $R - \varepsilon$ לכל $\varepsilon > 0$ ולכן זה נכון גם עבור R . ■

כדי להבין מדוע התוצאה הזו כל כך לא מובנת מאליה, נביט במקרה $\frac{1}{1+x^2}$ - אנליטית בכל $\mathbb{R}$, אבל רדיוס ההתכנסות סביב 0 הוא 1 - בגלל הנקודה הסינגולרית i . כעת נחזור לנוסחאות לנגזרות שראינו. בעזרת ההערכה הסטנדרטית של אינטגרלים, נוכל לקבל חסמים שהם שימושיים: אם כאשר $|z - z_0| = R$ מתקיים $|f(z)| \leq M$ אזי

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n!}{R^n} M$$

מכאן אפשר להוציא את משפט ליוביל ואת משפט ליוביל המוכלל.