

תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

21 במאי 2017

בשיעור שעבר, דיברנו על משפט קושי ההומולוגי:

משפט 0.1 יהי U תחום, תהי f גזירה על U ותהי α לולאה, ולמעשה שרשרת, כלומר היא סכום פורמלי של לולאות:

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

שהומולוגית לאפס, כלומר, לכל $z \notin U$ מתקיים $\text{Ind}_\alpha(z) = 0$. אזי מתקיים

$$f(z) 2\pi i \text{Ind}_\alpha(z) = \int_\alpha \frac{f(w)}{w-z} dw$$

וכן

$$\int_\alpha f(z) dz = 0$$

הוכחה: נותר לנו להוכיח את החלק השני. ניקח f כמו במשפט, וניקח $z_0 \in U$ לא על $\text{Im} \alpha$, ונגדיר

$$g(z) = f(z)(z - z_0)$$

זו פונקציה גזירה על U . נפעיל עליה את החלק הראשון של המשפט בנקודה $z = z_0$. ברור שמתקיים $g(z_0) = 0$, ולכן אגף שמאל מתאפס, ונקבל

$$0 = \int_\alpha \frac{f(w)(w - z_0)}{w - z_0} dw = \int_\alpha f(z) dz$$

■

מסקנה 0.2 אם U פשוט קשר הומולוגית, כלומר לכל לולאה $\alpha \subseteq U$ ולכל $z \notin U$ מתקיים $\text{Ind}_\alpha(z) = 0$, אזי U פשוט קשר לפונקציות, כלומר לכל f גזירה על U יש F עם $F' = f$ על כל U .

הוכחה: קבועים נקודה בסיסית $z_0 \in U$. לכל $z \in U$ ישנה מסילה פוליגונית P_z מהנקודה z_0 אל z (קיימת כי U תחום). נגדיר

$$F(z) = \int_{P_z} f(w) dw$$

זה מוגדר היטב בדיוק בגלל התנאי על התאפסות האינטגרל, ובעבר ראינו כבר שאם $F' = f$ מקבלים את F ככה את F מגדירים ככה את F . ■

מסקנה 0.3 נניח את תנאי משפט קושי ההומולוגי, ויהיו α, β לולאות לאו דווקא הומולוגיות לאפס, אבל כן מתקיים לכל $z \notin U$

$$\text{Ind}_\alpha(z) = \text{Ind}_\beta(z)$$

אזי

$$\int_\alpha f dz = \int_\beta f dz$$

הוכחה: נובעת מיידית ממשפט קושי ההומולוגי על ידי לקיחת המסילה $\gamma = \alpha - \beta$. ■

דוגמא ניתן דוגמא למסילה שהומולוגית לאפס אבל לא כוויצה, בתחום $U = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ - נקיף את 1 באוריינטציה חיובית, אחר כך נקיף את -1 באוריינטציה חיובית, ואז את 1 באוריינטציה שלילית ואת -1 באוריינטציה שלילית (כל המעגלים משיקים בנקודה 0).

משפט 0.4 (משפט השארית למסילות הומולוגיות לאפס) יהי U תחום, ותהי f גזירה על U למעט מספר סופי של נקודות סינגולריות $p_1, \dots, p_n$. תהי α לולאה (או שרשרת) הומולוגית לאפס בתחום U , עם $p_i \notin \text{Im } \alpha$. אזי

$$\int_\alpha f(z) ds = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Ind}_\alpha(p_i) \text{Res}(f, p_i)$$

הוכחה: כדי להסיק את המשפט הזה ממשפט קושי ההומולוגי נשתמש ברעיון אחר, כיוון שרוצים להמשיך לעבוד רק עם f גזירה בתחום הגדרתה. לשם כך, יהי

$$V = U \setminus \{p_i\}_{i=1}^n$$

עכשיו f גזירה על כל V . אנחנו צריכים לתקן את המסילה, כי כעת האינדקס שלה על חלק מהנקודות שמחוץ לקבוצה V אינו 0. יהי C_i מעגל נגד כיוון השעון סביב p_i שמוכל בתוך U ולא מכיל אף נקודה p_j כאשר $j \neq i$. נגדיר

$$n_i = \text{Ind}_\alpha(p_i)$$

ונזכור שהשארית מקיימת

$$a_i = \text{Res}(f, p_i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_i} f(z) \, dz$$

נביט בשרשרת החדשה

$$\beta = \alpha - \sum_{i=1}^n n_i C_i$$

ונשים לב כי β הומולוגית לאפס בתחום V . זאת משום שביחס לנקודות מחוץ לתחום U האינדקס של α, β שווה, ובנקודות p_j עבור j קבוע, נקבל

$$\text{Ind}_\beta(p_j) = \text{Ind}_\alpha(p_j) - \sum_{i=1}^n n_i \text{Ind}_{C_i}(p_j) = \text{Ind}_\alpha(p_j) - n_j \cdot 1 = 0$$

כעת, משתמשים במשפט קושי ההומולוגי עבור השרשרת β והפונקציה f על V :

$$\int_{\beta} f(z) \, dz = 0$$

אזי

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\alpha - \sum_{i=1}^n n_i C_i} f(z) \, dz = \int_{\alpha} f(z) \, dz - \sum_{i=1}^n n_i \int_{C_i} f(z) \, dz = \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Ind}_\alpha(p_i) (2\pi i) \text{Res}(f, p_i) \end{aligned}$$

■

וזו הנוסחה שרצינו.