

תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

18 במאי 2017

נני כי $U \subseteq \mathbb{C}$ תחומתהי f גזירה על U . נרצה להראות שהיא גזירה אינסוף פעמים, ולקבל מסקנות. נביט במסילת מעגל פשוטה α בתוך U (אפשר גם ריבוע או משולש או כל צורה כזו). לכל נקודה z בפנים של המעגל נגדיר

$$g_z(w) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$$

כמובן שזה לא מוגדר בנקודה z . אפשר להגדיר באופן רציף $g_z(z) = f'(z)$, אבל אנחנו נעדיף לחשוב על זה כנקודת אי הגדרה. מצד שני, נובע שזו נקודת סינגולריות אינטגרבילית - כלומר השארית שם 0. α כוויצה בתחום U , ולכן אנחנו יודעים כי

$$\int_{\alpha} g_z(w) dw = 0$$

ממשפט השארית.

נשים לב שאם קיימת נקודה אחת בתוך המעגל z_0 שבה f רק רציפה ולא גזירה, ומגדירים באותו אופן $g_z(w)$, אז גם z_0 הופכת להיות נקודת סינגולריות בה g_z אינה מוגדרת, אבל נשים לב שעדיין $\text{Res}(g_z(w), z) = 0$ כי מתקיים התנאי

$$\lim_{w \rightarrow z_0} g_z(w)(w - z_0) = 0$$

בכל נקודה בה $z \neq z_0$, זה ברור, כי $g_z(w)$ חסומה בסביבות z_0 . עבור $z = z_0$ נקבל

$$g_{z_0}(w)(w - z_0) = f(w) - f(z_0) \rightarrow 0$$

מרציפות. לפיכך שוב נקבל

$$\int_{\alpha} g_z(w) dw = 0$$

כאמור, ישנן לכל היותר שתי נקודות סינגולריות, אבל השאריות הן 0. אם כן, נקבל

$$0 = \int_{\alpha} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \int_{\alpha} \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_{\alpha} \frac{f(z)}{w - z} dw$$

$$\int_{\alpha} \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_{\alpha} \frac{f(z)}{w - z} dw = f(z) \operatorname{Ind}_{\alpha}(z) 2\pi i$$

מבחרת α (כל מסילה כזו עם התכונה הזו תעבוד), $\operatorname{Ind}_{\alpha} z = 1$, ולכן

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

זו נקראת נוסחת קושי (או נוסחת קושי למעגל, אם α מעגל). בתרגיל הבית ראינו כי אגף ימין הוא תמיד פונקציה גזירה של z ונגזרתה היא

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw$$

נובע כי f גזירה בפנים של α ומתקיים

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

כמו כן ראינו

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

בפרט, קיבלנו שאם f גזירה בסביבת z_0 ורציפה בנקודה z_0 אזי f גזירה גם בנקודה z_0 .

מסקנה 0.1 (משפט ליוביל המצומצם) נניח כי f גזירה בכל $\mathbb{C}$. נניח כי $f(z) \rightarrow 0$ כאשר $z \rightarrow \infty$. אזי $f \equiv 0$.

הוכחה: יהי $z_0 \in \mathbb{C}$ ויהי $\varepsilon > 0$. ניקח R גדול מספיק עבורו אם $|z - z_0| = R$ אזי $|f(z)| < \varepsilon$. נפעיל כאן את נוסחת קושי לשפת המעגל $|z - z_0| = R$:

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(w)}{w - z_0} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{R} 2\pi R = \varepsilon$$

■

ולכן $f(z_0) = 0$ כי $\varepsilon > 0$ שרירותי.

משפט 0.2 (משפט ליוביל) אם f גזירה בכל $\mathbb{C}$ וחסומה, אזי f קבועה.

■

הוכחה: משתמשים בנוסחת קושי לנגזרת, ומראים כי $f' \equiv 0$.

משפט 0.3 (משפט ליוביל המוכלל) אם f גזירה בכל $\mathbb{C}$, $\frac{f(z)}{|z|^n} \rightarrow 0$ כאשר $z \rightarrow \infty$, אזי f פולינום ממעלה לכל היותר $n - 1$.

1 משפט קושי ההומולוגי

ניזכר שהגדרנו לולאה α להיות הומוולוגית לאפס בתחום U אם לכל $z \notin U$ מתקיים $\text{Ind}_\alpha z = 0$. זה שוב ניסיון לתאר מצב בו הפנים של α לא מכיל חורים בתוך U .

משפט 1.1 (משפט קושי ההומולוגי) תהי f אנליטית בתוך U , ותהי α לולאה עם $\text{Im} \alpha \subseteq U$ שהומוולוגית לאפס בתחום U . אזי

$$2\pi i \cdot f(z) \cdot \text{Ind}_\alpha(z) = \int_\alpha \frac{f(w)}{w-z} dw$$

לכל $z \in U$, וכמו כן

$$\int_\alpha f(w) dw = 0$$

נראה שהנסוחה השנייה נובעת ישירות מהראשונה. נשים לב שראינו לפני רגע נוסחה זהה עבור α מעגל, z בפנימו.

למעשה, חשוב יהיה לנו לטפל בלולאות כלליות יותר: נניח $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ סכום של לולאות כאשר, כזכור, מגדירים

$$\int_\alpha f(w) dw = \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i} f dw$$

ובדומה

$$\text{Ind}_\alpha(z) = \sum_{i=1}^n \text{Ind}_{\alpha_i}(z)$$

נשים לב שאם $\text{Ind}_\alpha(z) = 0$ עדיין לא דווקא $\text{Ind}_{\alpha_i}(z) = 0$. **הוכחה:** (של המשפט) נגדיר

$$U^0 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Ind}_\alpha(z) = 0\}$$

זו קבוצה פתוחה שלא מכילה את $\text{Im} \alpha$ (ועליה האינדקס לא מוגדר), וכמו כן מהנתון על הומוולוגיות α מתקיים $U^c \subseteq U^0$. אזי $\mathbb{C} = U \cup U^0$.

עבור $z \in \mathbb{C}$ נגדיר את הפונקציות הבאות: אם $z \in U$, אז

$$g_z^1(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & w \neq z \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

כפונקציה של w , זו פונקציה גזירה בכל $w \neq z$. היא רציפה בנקודה $w = z$, כי f גזירה בנקודה z , ולכן ראינו שנובע שהיא גזירה לכל $w \in U$. עכשיו נגדיר

$$h^1(z) = \int_{\alpha} g_z^1(w) dw$$

עבור $z \in U^0$ נגדיר

$$g_z^0(w) = \frac{f(w)}{w - z}$$

ואז נגדיר

$$h^0(z) = \int_{\alpha} g_z^0(w) dw$$

נגדיר

$$h(z) = \begin{cases} h^1(z) & z \in U \\ h^0(z) & z \in U^0 \end{cases}$$

נראה שזה מוגדר היטב (כלומר שעל $U \cap U^0$ יש הזדהות של h^1, h^0), גזיר, וכן $h(z) \rightarrow 0$ כאשר $z \rightarrow \infty$. ממשפט ליוביל המצומצם ינבע $h = 0$, ובפרט $h^1 = 0$. זה יגרור את החלק הראשון של המשפט, כמו בהוכחת נוסחת קושי. ראשית, נראה כי $h^1(z)$ גזירה. כאשר $z \notin \text{Im} \alpha$ נכתוב

$$g_z^1(w) = \frac{f(w)}{w - z} - \frac{f(z)}{w - z}$$

בתרגיל הבית ראינו שהאינטגרל על כל אחד מהמחזורים הוא פונקציה גזירה של z . ממה שהוכחנו הוסנו נובע כי $g_z^1(w)$ גזירה לכל $w \in U$. כאשר $z \in \text{Im} \alpha$, לא נוכל להשתמש ישירות בתרגיל הבית, אבל אפשר להשתמש בתרגיל בית אחר - אם $z \in \text{Im} \alpha$, אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת לולאה β עם $\|\alpha - \beta\| < \varepsilon$ וכן $z \notin \text{Im} \beta$. יחד עם זה נזכור שאפשר לבחור ε קטן מספיק ככה שבמצב הזה אינטגרלים על β ועל α יהיו שווים. לכן נוכל להשתמש במסילה β לצורך הגדרת $h^1(z)$ ולקב גזירות גם עבור $z \in \text{Im} \alpha$. $h^0(z)$ בבירור גזירה - זה פשוט נובע מאותו תרגיל בית. נותר לנו להראות כי על החיתוך הפונקציות מסכימות. אכן:

$$h^1(z) - h^0(z) = \int_{\alpha} \frac{f(z)}{w - z} dw = f(z) \cdot 2\pi i \cdot \text{Ind}_{\alpha}(z) = 0$$

כי $z \in U^0$. לבסוף, כאשר $z \rightarrow \infty$, בוודאות יש שלב שממנו $z \in U_0$. לכן רחוק מספיק, $h(z) = h_0(z)$. לכן נראה כי $h_0(z) \rightarrow 0$ במצב זה.

$$h_0(z) = \int_{\alpha} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

כאשר $z \rightarrow \infty$ מתקיים $\left| \frac{f(w)}{w-z} \right| \rightarrow 0$, ולכן גם האינטגרל שואף לאפס. לכן $h(z) \rightarrow 0$,
 וממשפט ליוביל המצומם נסיים, כמו שתיארנו קודם. ■