

תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

11 במאי 2017

ראינו בשיעור שעבר את משפט השארית, ובתרגיל בית ראינו חישוב של אינטגרל בעזרת כלים מרוכבים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}$$

כעת נחשב כאן, לכל פרמטר t ממשי, את

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{1+x^2} dx$$

נחשב ראשית את האינטגרל בקטע $[-R, R]$. נשלים את הקטע למסילה מלבנית סגורה כלפי מעלה (מקיפה את i , לא את $-i$). חישוב השארית של $\frac{1}{1+x^2}$ בנקודה i מתבצע בקלות על ידי

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, q(z_0) = 0, q'(z_0) \neq 0 \Rightarrow \text{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

כעת חסמנו את האינטגרל על שלושת חלקי המסילה שאינם על הישר הממשי על ידי אורך המסילה (לינארי בגודל R) כפול חסם על הפונקציה $(\frac{1}{R^2-2})$ למשל, וראינו שזה שואף לאפס כאשר $R \rightarrow \infty$.
באותה שיטה נחשב את

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx$$

עם סיבוך קטן. נניח כי $t \geq 0$. אז נסגור את המסילה בחצי המישור העליון, כמו קודם, ומשתמשים בכך שעבור $t \geq 0$ מתקיים

$$|e^{itz}| \leq 1$$

כאשר $\text{Im} z \geq 0$. עבור $t \leq 0$, אותו דבר נכון עם $\text{Im} z \leq 0$, ולכן נסגור את המסילה בחצי המישור התחתון (באוריינטציה ההפוכה - האינדקס של $-i$ הוא -1). עבור f החדשה נקבל

$$\begin{aligned}\text{Res}(f, i) &= \frac{e^{-t}}{2i} \\ \text{Res}(f, -i) &= -\frac{e^t}{2i}\end{aligned}$$

חוסמים את הפונקציה על חלק המסילה הלא ממשי שוב, ומקבלים

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx = \begin{cases} \pi e^{-t} & t \geq 0 \\ \pi e^t & t \leq 0 \end{cases} = \pi e^{-|t|}$$

נעבור כעת לדבר אחר. בהינתן לולאה α , למרות שהמושג של להיות "בפנים" של α או "מחוץ לה" הוא די אינטואיטיביים. רוצים לנסות להגדיר אותו במדויק. מושג האינדקס מציע דרך טבעית לעשות זאת - נרצה להגדיר את הפנים של α להיות אותן נקודות מחוץ לתמונה של α שהאינדקס שלהן לא 0. ההגדרה הזו מדויקת לחלוטין כאשר המסילה פשוטה - כלומר $\alpha|_{[a,b]}$ חד-חד-ערכית.

משפט 0.1 (משפט ז'ורדן) תהי α לולאה פשוטה במישור. אזי $\mathbb{C} \setminus \text{Im} \alpha$ מתחלק לשני מרכיבי קשירות. אחד אינו חסום, ובו האינדקס הוא 0, והשני חסום ועליו האינדקס תמיד 1 או תמיד -1 . השפה של שני המרכיבים הללו היא בדיוק $\text{Im} \alpha$.

זה משפט כללי מאוד בטופולוגיה, שלא נוכיח או נשתמש בו.

הגדרה 0.2 לולאה α נקראת פשוטה הומוטוטית וחיובית אם לכל $z \in \mathbb{C} \setminus \text{Im} \alpha$ מתקיים $\text{Ind}_\alpha(z) = 1$ או $\text{Ind}_\alpha(z) = 0$. בסיטואציה זו נגדיר את הפנים של α :

$$\overset{\circ}{\alpha} = \{z \mid \text{ind}_\alpha(z) \neq 0\}$$

משפט ז'ורדן מבטיח שכל לולאה פשוטה α , עד כדי אוריינטציה, היא פשוטה הומוטוטית וחיובית.

1 עקרון הארגומנט

משפט 1.1 (עקרון הארגומנט) תהי f אנליטית בתחום U , ותהי α מסילה פשוטה הומוטוטית (חיובית) וכווצה בתוך U . נניח כי f לא מתאפסת על $\text{Im} \alpha$. אזי

$$\int_{\alpha} \frac{f'}{f} dz = 2\pi i N$$

כאשר N הוא מספר האפסים של f בפנים של α (כולל ריבוי).

תזכורת אם f אנליטית על U , $f(z_0) = 0$, אזי נוכל לכתוב $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ כאשר g אנליטית עם $g(z_0) \neq 0$, ואז k נקרא הריבוי של z_0 כאפס של f .

הוכחה: לפני ההוכחה עצמה, נבין למה מספר האפסים סופי. נזכור כי $\mathring{\alpha} \cup \text{Im}\alpha$ קומפקטי. עכשיו, נשים לב שכאשר $f \neq 0$ אנליטית בתחום U , לכל $z_0 \in U$ יש סביבה U_{z_0} שבה האפס היחיד של f הוא z_0 (אולי) בעצמו - אם היא לא מתאפסת בנקודה z_0 אז היא לא מתאפסת בכל הסביבה - כי אם $f(z_0) = 0$, נכתוב $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ כאשר g אנליטית עם $g(z_0) \neq 0$, ומכאן שבסביבה קרובה מספיק של z_0 לא אפס, לא $g(z)$ לא אפס, ולכן גם $f(z)$ לא אפס. תהי $K \subseteq U$ קומפקטית. הכיסוי $\{U_z\}_{z \in K}$ הוא כיסוי פתוח של K , ולכן יש לו תת כיסוי סופי - ולכן יש מספר סופי של אפסים בתוך K . כעת אנחנו מוכנים להוכיח את עקרון הארגומנט עצמו.

בנקודות בהן $f \neq 0$, $\frac{f'}{f}$ היא גזירה (f גזירה אינסוף פעמים). הנקודות הסינגולריות של f הן הנקודות שבהן $f = 0$. ממשפט השארית:

$$\int_{\alpha} \frac{f'}{f} dz = 2\pi i \sum_{f(z)=0} \text{Res}\left(\frac{f'}{f}, z\right) \text{Ind}_{\alpha}(z)$$

מעניינות אותנו כאן רק הנקודות p_i שעבורן השארית לא אפס וגם האינדקס לא אפס. התנאי על האינדקס אומר שהן בתוך הפנים של α , ואנחנו יודעים ששם האינדקס תמיד 1. לכן נשאר להבין מדוע $\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, p\right)$ שווה בדיוק לריבוי של p כאפס של f . נשים לב שלנגזרת הלוגריתמית של f ($\frac{f'}{f}$) יש תכונה יפה:

$$\frac{(\varphi\psi)'}{\varphi\psi} = \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\psi'}{\psi}$$

נשתמש בכל כשנכתוב עבור p שבה $f(p) = 0$:

$$f(z) = (z - p)^k g(z)$$

כאשר $g(p) \neq 0$ אנליטית. k הוא הריבוי של p . כעת,

$$\begin{aligned} \frac{f'}{f} &= \frac{k(z-p)^{k-1}}{(z-p)^k} + \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{k}{z-p} + \frac{g'(z)}{g(z)} \\ \frac{f'}{f} - \frac{k}{z-p} &= \frac{g'(z)}{g(z)} \end{aligned}$$

הפונקציה באגף ימין היא גזירה בנקודה p , ולכן מההגדרה שלנו לשארית נקבל $\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, p\right) = k$. לכן סיימנו. ■

משפט 1.2 (משפט רושה) נניח כי α, U כמו בעקרון הארגומנט, ויהיו f, g אנליטיות על U כך שלכל $z \in \text{Im}\alpha$ מתקיים

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

אזי יש לפונקציות f, g אותו מספר אפסי בפנים של α .

הוכחה: נשים לב שמהתנאי נובע כי f, g לא מתאפסות על α - אחרת היה בנקודת ההתאפסות אי שוויון חלש. נפעיל את עקרון הארגומנט - נרצה להראות שבתנאים הללו מתקיים

$$\int_{\alpha} \frac{f'}{f} dz = \int_{\alpha} \frac{g'}{g} dz$$

בתרגיל הבית ראינו כי

$$\int_{\alpha} \frac{f'}{f} dz = \int_{f \circ \alpha} \frac{1}{z} dz$$

ולכן מספיק להראות

$$\int_{f \circ \alpha} \frac{1}{z} dz = \int_{g \circ \alpha} \frac{1}{z} dz$$

ולכן מספיק להוכיח שהמסילות $f \circ \alpha, g \circ \alpha$ הומוטופיות מחוץ לנקודה 0, וינבע השוויון. נתבונן בהומוטופיה:

$$H(t, s) = (1 - s) f(\alpha(t)) + s g(\alpha(t))$$

ונראה שההנחה משפט רושה מתורגמת לכך שזו לא מתאפסת באף שלב. אכן, נזכור שאם $a, b \in \mathbb{C}$ אזי $|a + b| \leq |a| + |b|$, כאשר שוויון מתקיים אם ורק אם $a = tb$ כאשר $t \in \mathbb{R}$ אי שלילי. אם נחליף $b \rightarrow -b$, נקבל

$$|a - b| \leq |a| + |b|$$

ושוויון אם ורק אם $a = tb$ עבור $t \in \mathbb{R}$ אי חיובי. נניח בשלילה כי $H(t_0, s_0) = 0$, אזי

$$(1 - s_0) f(\alpha(t_0)) + s_0 g(\alpha(t_0)) = 0$$

מעבירים אגפים ומקבלים שאחד מבין $f(\alpha(t_0)), g(\alpha(t_0))$ הוא כפולה של השני בממשי שלילי - בסתירה להנחה. לכן סיימנו. ■

נראה כעת שימוש קלאסי של משפט רושה - נוכיח את המשפט היסודי של האלגברה (שוב). יהי

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

פולינום. נגדיר $g(z) = z^n$. ניקח R מספיק גדול כך שמתקיים $R > 1$ וגם

$$R > \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$$

נראה שעבור R כזה תנאי משפט רושה מתקיימים על המסילה $\alpha = \{|z| = R\}$. אכן,

$$|f(z) - g(z)| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| |z|^i < \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| R^{n-1} < R^n$$

ולכן נקבל שיש אותו מספר התאפסויות של f, g בתחום - כלומר f מתאפסת, כי g מתאפסת באפס.