

תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

7 במאי 2017

משפט 0.1 תהי U פתוחה, $p \in U$, ותהי f גזירה על $U \setminus \{p\}$. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. לכל סביבה קמורה V של p בתוך U , קיימת F גזירה על $V \setminus \{p\}$ עם $F' = f$.
2. קיימת סביבה V של p בתוך U שעליה קיימת F שגזירה על $V \setminus \{p\}$ עם $F' = f$.
3. קיים מעגל $\alpha \subseteq U$ המכיל את p בפנימו, ופנימו מוכל בתוך U , ומקיים

$$\int_{\alpha} f(z) dz = 0$$

4. לכל מעגל $\alpha \subseteq U$ המכיל את p בפנימו ופנימו מוכל בתוך U מתקיים

$$\int_{\alpha} f(z) dz = 0$$

5. לכל משולש $\Delta \subseteq U$ המכיל את p בפנימו ופנימו מוכל בתוך U מתקיים

$$\int_{\Delta} f(z) dz = 0$$

בנוסף, התנאי $\lim_{z \rightarrow p} f(z)(z - p) = 0$ גורר את קיום התנאים הללו.

הוכחה: $2 \Rightarrow 1$: ברור.

$2 \Rightarrow 3$: ניקח מעגל α שמוכל כולו בתוך V . יש F שמקיימת $F' = f$ על המעגל, והמעגל הוא מסילה סגורה, ולכן

$$\int_{\alpha} f(z) dz = 0$$

$3 \Rightarrow 4$: ניקח הומוטופיה של המעגל שנתון שיש לנו למעגל אחר. הומוטופיה משמרת אינטגרלים ולכן סיימנו.

$4 \Rightarrow 5$: אותו שיקול בדיוק של הומוטופיה.

$5 \Rightarrow 1$: זוהי בדיוק התוספת החשובה שהוכחנו סביב משפט גורסה.

הטענה על התנאי המספיק הוכחנו במסגרת אותו דיון. ■

הגדרה 0.2 כאשר התנאים מהמשפט הקודם מתקיימים, אומרים כי p היא נקודת סינגולריות אינטגרלית לפונקציה f .

כאשר ניתן להגדיר את f בנקודה p כך שהפונקציה f תהיה גזירה גם בנקודה p , אומרים כי p נקודה סינגולרית סליקה.

דוגמא בתחום $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, עבור $f(z) = \frac{1}{z}$, 0 אינה נקודת סינגולריות אינטגרלית. עבור $f(z) = \frac{1}{z^2}$ היא כן - ניקח $F(z) = -\frac{1}{z}$.

משפט 0.3 תהי U פתוחה, $p \in U$, ופונקציה f גזירה על $U \setminus \{p\}$. אזי קיים a יחיד כך שהנקודה p היא נקודה סינגולרית אינטגרלית של $f - \frac{a}{z-p}$ (על U). ערך זה נקרא השארית של f בנקודה p , ומסומן

$$\text{Res}(f, p) = a$$

ניתן לחשב אותו על ידי

$$a = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} f(z) dz$$

כאשר α מעגל המכיל את p ומוכל (עם פנימו) בתוך U .

הוכחה: נשים לב כי אם p סינגולרית אינטגרלית לפונקציה $f(z) - \frac{a}{z-p}$, אזי לכל מעגל α שמכיל את p ומוכל עם פנימו בתוך U מתקיים

$$0 = \int_{\alpha} \left(f(z) - \frac{a}{z-p} \right) dz = \int_{\alpha} f(z) dz - \int_{\alpha} \frac{a}{z-p} dz = \int_{\alpha} f(z) dz - 2\pi i a$$

$$a = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} f(z) dz$$

לכן ברור כי אם קיים a כזה, אזי הוא נקבע ביחידות. מצד שני, אם נבחר את a לפי הנוסחה הזו, עבור מעגל מסויים α , נובע מכל השוויונות שעשינו שהמעגל α מקיים

$$\int_{\alpha} \left(f(z) - \frac{a}{z-p} \right) dz = 0$$

ולכן p אכן נקודה סינגולרית אינטגרלית של $f(z) - \frac{a}{z-p}$ - הראינו את תנאי 3 במשפט הקודם. ■

בדוגמאות הקודמות:

$$\text{Res}\left(\frac{1}{z}, 0\right) = 1$$

$$\text{Res}\left(\frac{1}{z^2}, 0\right) = 0$$

טענה 0.4 בסיטואציה של המשפט הקודם, אם מתקיים

$$\lim_{z \rightarrow p} f(z)(z-p) = a$$

$$a = \text{Res}(f, p)$$

הוכחה: בודקים שהפונקציה $f(z) - \frac{a}{z-p}$ מקיימת את התנאי המספיק שבסוף המשפט הראשון שראינו בהרצאה זו:

$$\lim_{z \rightarrow p} \left(f(z) - \frac{a}{z-p} \right) (z-p) = \lim_{z \rightarrow p} f(z)(z-p) - a = a - a = 0$$

■

ולכן סיימנו.

מסקנה 0.5 (תרגיל קל) נניח כי f, g גזירות גזירות בתחום U , אבל $g(p) = 0$, כאשר $g'(p) \neq 0$. אזי

$$\text{Res}\left(\frac{f}{g}, p\right) = \frac{f(p)}{g'(p)}$$

אם עוברים שוב על כל תורת האינטגרציה שפיתחנו, רואים שהכל עובר לפונקציות גזירות על U עם נקודת סינגולריות אינטגרבילית $p \in U$. יש להיזהר רק מהדברים הבאים:

1. אינה נקודת הפתיחה או הסיום של המסילה α .

2. אסור לקחת "נקודות דגימה" t_i עבורן $\alpha(t_i) = p$ בחישובי $F(\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i))$.

כן מותר שהמסילה α תעבור בנקודה p .

דוגמא אפשר לחשב ולקבל

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{z^2} dz = -\frac{1}{z} \Big|_{-1}^1 = -2$$

בהתאמה הזו, כל ההוכחות שעשינו תופסות, ובאותה צורה אפשר להניח שיש מספר סופי של נקודות סינגולריות אינטגרביליות לפונקציה f בתוך U . בפרט, מקבלים את המשפט הבא:

משפט 0.6 נניח כי $\{p_1, \dots, p_n\} \subseteq U$, f גזירה על $U \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ שכל p_i נקודה סינגולרית אינטגרבילית שלה, α, β לולאות הומוטופיות בתוך U , אזי

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \int_{\beta} f(z) dz$$

בפרט, אם α כוויצה בתוך U אזי

$$\int_{\alpha} f(z) dz$$

ומכאן נקבל משפט מאוד חשוב:

משפט 0.7 (משפט השארית) נניח כי $f : U \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ גזירה, α מסילה בתוך U שאינה עוברת באף אחת מהנקודות p_i , ושהיא כוויצה בתחום U . אזי

$$\int_{\alpha} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, p_i) \text{Ind}_{\alpha}(p_i)$$

הוכחה: נגדיר את הפונקציה

$$\tilde{f}(z) = f(z) - \sum_{i=1}^n \frac{\text{Res}(f, p_i)}{z - p_i}$$

כעת, כל p_i היא נקודה סינגולרית אינטגרלית של $\tilde{f}$, כי היא כזו עבור $f(z) - \frac{\text{Res}(f, p_i)}{z - p_i}$, ושאר המחוברים אינטגרליים בסביבת p_i . לכן נפעיל את המשפט הקודם עבור המסילה הכוויצה α ולקבל

$$\int_{\alpha} \tilde{f}(z) dz = 0$$

כלומר

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} f(z) - \sum_{i=1}^n \frac{\text{Res}(f, p_i)}{z - p_i} dz &= 0 \\ \int_{\alpha} f(z) dz &= \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, p_i) \int_{\alpha} \frac{1}{z - p_i} dz = \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, p_i) 2\pi i \cdot \text{Ind}_{\alpha}(p_i) = \\ &= 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, p_i) \text{Ind}_{\alpha}(p_i) \end{aligned}$$

■