

פונקציות מרוכבות 1 – תרגול 2

28.02.11

נגזרת מרוכבת

הגדרה. אם $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, U קבוצה פתוחה, $z_0 \in U$. נאמר ש- f גזירה בנקודה z_0 אם קיים הגבול:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

באופן שקול, f גזירה ב- z_0 אם קיימת הצגה, $A \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = f(z_0) + A \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|), \quad z \rightarrow z_0$$

$f(z_0)$ הזזה, A מתיחה וסיבוב.
אז מקומית f נראית כמו הזזה, מתיחה וסיבוב.

תרגיל. הוכיחו כי $f(z) = |z|$ אינה גזירה באף נקודה.

הוכחה.

$$f^2 = |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

ולכן עבור $z \neq 0$,

$$\bar{z} = \frac{f^2(z)}{z}$$

לכן אם f גזירה ב- z_0 אז גם $\bar{z}$ גזירה ב- z_0 וזו סתירה. נותרה הנקודה $z_0 = 0$. עבור נקודה זו הצמצום של $|z|$ ל- $\mathbb{R}$ אינה גזירה. לכן הפונקציה לא גזירה ב- $\mathbb{C}$. $\square$

משוואות קושי-רימן

אם f גזירה ב- z_0 , $f = u + iv$, $u, v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ מקיימת את המשוואות:

$$u_x(z_0) = v_y(z_0)$$

$$u_y(z_0) = -v_x(z_0)$$

זה תנאי הכרחי אבל לא מספיק. בדקנו שאיפה רק בשני כיוונים. התנאי הזה יהיה מספיק אם f דיפרנציאבילית במובן הממשי ב- z_0 .
נגדיר $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$, $\xi \in \mathbb{C}$ נכתוב:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + i \frac{\partial v}{\partial \xi}$$

תרגיל. f גזירה ב- z_0 אז:

$$\frac{\partial f}{\partial(i\xi)}(z_0) = i \frac{\partial f}{\partial \xi}(z_0)$$

הוכחה.

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \langle \nabla u, \xi \rangle$$

$$\frac{\partial u}{\partial(i\xi)} + i \frac{\partial v}{\partial(i\xi)} \stackrel{?}{=} i \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + i \frac{\partial v}{\partial \xi}$$

$$\begin{cases} (1) \frac{\partial u}{\partial(i\xi)} \stackrel{?}{=} -\frac{\partial v}{\partial \xi} \\ (2) \frac{\partial v}{\partial(i\xi)} \stackrel{?}{=} \frac{\partial u}{\partial \xi} \end{cases}$$

נבדוק את (1):

$$\langle \nabla u, i\xi \rangle \stackrel{?}{=} -\langle \nabla v, \xi \rangle$$

$$\xi = \xi_x + i\xi_y$$

$$i\xi = -\xi_y + i\xi_x$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\xi_y \\ \xi_x \end{pmatrix} \right\rangle \stackrel{?}{=} -\left\langle \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$-u_x \xi_y + u_y \xi_x \stackrel{?}{=} -\xi_x v_x - v_y \xi_y$$

$$\xi_x : u_y = -v_x$$

$$\xi_y : -u_x = -v_y$$

משוואות קושי-רימן

□

הערה.

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(z_0) = f'(z_0) \cdot \xi$$

תרגיל. עבור אילו ערכי z הפונקציה $f(z) = \bar{z}^2$ גזירה?

פתרון:

$$f(x + iy) = (x - iy)^2 = x^2 - y^2 + i(-2xy)$$

$$u = x^2 - y^2 \quad v = -2xy$$

נחשב נגזרות חלקיות:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2y \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

נכתוב משוואות קושי-רימן, תנאי הכרחי (בינתיים לא נשתמש מתי הוא מספיק) לגזירות:

$$\begin{cases} 2x = -2x \\ -2y = 2y \end{cases}$$

f גזירה ב- $z \Leftrightarrow z = 0$.
עבור $z = 0$

$$f(z) = \bar{z}^2 = o(|z|)$$

$$|f| = |z|^2 = o(|z|) \quad z \rightarrow 0$$

לכן לפי הגדרה f גזירה ב- 0 ו- $f'(0) = 0$.

תרגיל. $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה, נגדיר:

$$f(z) = \int_0^1 \frac{h(t)}{t-z} dt$$

הוכיחו ש- f גזירה ב- $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$.

הערה. אינטגרל מרוכב על קטע ממשי:

$$\int_a^b (u(t) + iv(t)) dt := \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

תחת ההגדרה הזאת כל התכונות של אינטגרל נשמרות:

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

$$\lambda \in \mathbb{C} \quad \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$$

$\int_a^b : (\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ וזה אופרטור ליניארי.

הוכחה. נבחר z_0 .

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= \int_0^1 \left(\frac{h(t)}{t-z} - \frac{h(t)}{t-z_0} \right) dt = \int_0^1 \frac{h(t)(z-z_0)}{(t-z)(t-z_0)} dt = \\ &= (z-z_0) \int_0^1 \frac{h(t)dt}{(t-z)(t-z_0)} \end{aligned}$$

נראה כי:

$$\int_0^1 \frac{h(t)dt}{(t-z)(t-z_0)} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \int_0^1 \frac{h(t)dt}{(t-z_0)^2}$$

נראה שרצף הפונקציות $\frac{h(t)}{(t-z)(t-z_0)}$ מתכנס במידה שווה ל- $\frac{h(t)}{(t-z_0)^2}$ כאשר $z \rightarrow z_0$ בקטע $t \in [0, 1]$.

$$\frac{h(t)}{(t-z)(t-z_0)} - \frac{h(t)}{(t-z_0)^2} = \frac{h(t)(z-z_0)}{(t-z_0)^2(t-z)}$$

h רציפה ב- $[0, 1]$ אז היא חסומה: $|h| \leq M$. כמו כן, $z_0 \notin [0, 1]$ לכן $d = \text{dist}(z_0, [0, 1]) > 0$ היא קבוצה קומפקטית, המרחק הוא רציף. נותר לומר כי

$$|t - z_0| \geq d$$

נניח כי $|z - z_0| \leq \frac{d}{2}$ ואז

$$|t - z| \geq |t - z_0| - |z - z_0| \geq \frac{d}{2}$$

לכן

$$\left| \frac{h(t)(z-z_0)}{(t-z_0)^2(t-z)} \right| \leq \frac{M}{d^2 \frac{d}{2}} |z - z_0| \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$$

ההתכנסות היא במ"ש לכן האינטגרלים $\int_0^1$ מתכנסים כאשר $z \rightarrow z_0$. לכן יש גזירות וכן:

$$f'(z_0) = \int_0^1 \frac{h(t)}{(t-z_0)^2} dt$$

□

תרגיל. $f(x, y) = 3x + y + (3y - x)i$ מצאו נקודות גזירות במובן המרוכב של f .

הוכחה.

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{3}{2}(z + \bar{z}) - \frac{i}{2}(z - \bar{z}) + i\left(-\frac{3}{2}i(z - \bar{z}) - \frac{z - \bar{z}}{2}\right) = \\ &= z\left(\frac{3}{2} - \frac{i}{2} + \frac{3}{2} - \frac{i}{2}\right) + \bar{z}\left(\frac{3}{2} + \frac{i}{2} - \frac{3}{2} - \frac{i}{2}\right) = (3 - i)z \end{aligned}$$

□

ולכן f גזירה ו- $f'(z) = 3 - i$