

פונקציות מרוכבות 1 – תרגול 1

21.02.11

הצגה קוטבית

נייצג מספר מרוכב ע"י מרחק וכיוון $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$.
מציגים:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

כאשר $r = |z|$
 θ היא הארגומנט של z , מוגדר עד כדי הוספת 2π .

$$\text{Arg } z \in (-\pi, \pi]$$

$$\arg z = \{\text{Arg } z + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$$

בצורה כזאת נוח לעשות כפל. ראינו:

$$\begin{aligned}(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) &= \\&= (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \sin \theta_1) = \\&= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\end{aligned}$$

לכן נוח גם לעשות חזקה:
כלל DeMoivre

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

סימון: עבור $\theta \in \mathbb{R}$ נסמן:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

נקודה על מעגל היחידה עם ארגומנט θ .
כעת הצגה קוטבית:

$$z = re^{i\theta}$$

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

תרגיל 1

מצאו את $\sqrt[5]{1-i}$.

מה הכוונה? רוצים $\{z \in \mathbb{C} : z^5 = 1-i\}$.

ראינו שלכפל וחזקה עדיף להשתמש בהצגה קוטבית. ננסה:

$$|i-1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\arg(x+iy) = \arctan \frac{y}{x} \pmod{\pi} \text{ תמיד}$$

$$\text{Arg}(1-i) = \arctan \frac{\text{Im}(1-i)}{\text{Re}(1-i)} = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$1-i = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

$$z^5 = 1-i \text{ ש-} z = re^{i\theta} \text{ נניח}$$

$$(re^{i\theta})^5 = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

$$r^5e^{i5\theta} = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

וזה נכון אם ורק אם

$$r^5 = \sqrt{2}$$

$$5\theta = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\Downarrow$

$$r = 2^{1/10}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

מעוניינים ב- θ מדולו 2π לכן חמישה פתרונות שונים:

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{20}$$

$$\theta_2 = -\frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi$$

$\vdots$

$$\theta_5 = -\frac{\pi}{20} + \frac{8}{5}\pi$$

והפתרון הבא שווה לראשון.
 לכן יש חמישה שורשים ל- $z^5 = 1 - i$ והם $j = 1, \dots, 5$ $2^{1/10} e^{i\theta_j}$.
 באופן כללי לכל $a \neq 0$, n טבעי יש בדיוק n שורשים ל- $z^n = a$. למה? רושמים את a בקורדינטות פולריות וחוזרים על החישוב.

תרגיל 2: חשבו את $\arg(e^{i\alpha} + 1)$ עבור $0 < \alpha < \pi$

פתרון:

$$e^{i\alpha} = e^{-i\alpha}$$

צריכים את $\arg(1 + e^{-i\alpha})$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg}(1 + e^{-i\alpha}) &= \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(1 + e^{-i\alpha})}{\operatorname{Re}(1 + e^{-i\alpha})}\right) \pmod{\pi} = \\ &= \arctan\left(\frac{-\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}\right) = \arctan\left(\frac{-2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}\right) \\ &= \arctan\left(\tan\left(\frac{-\alpha}{2}\right)\right) = -\frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

לכן,

$$\operatorname{Arg}(e^{i\alpha} + 1) = -\frac{\alpha}{2} \text{ או } -\frac{\alpha}{2} + \pi$$

צריך להבין באיזה רביע $e^{i\alpha} + 1$ ראינו ש-

$$\operatorname{Re}(e^{i\alpha} + 1) = 1 + \cos \alpha > 0$$

$$\operatorname{Im}(e^{i\alpha} + 1) = -\sin \alpha < 0$$

לכן, $\operatorname{Arg}(e^{i\alpha} + 1) = -\frac{\alpha}{2}$
תרגיל 4: למצוא מקום גיאומטרי של כל הנקודות כך ש-

$$z^2 = 2 \operatorname{Re}(z)$$

פתרון: נרשום $z = x + iy$ ואז:

$$x^2 + y^2 = 2x$$

כלומר

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

וזה מעגל ברדיוס 1 סביב $(1, 0)$.

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 1\}$$

תרגיל 5: הוכיחו:

$$\Leftrightarrow z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$$

$$|z| = 1 \text{ או } z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

פתרון:

$\Leftarrow$: אם $z \in \mathbb{R}$ ברור ש- $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$.
אם $|z| = 1$ אז

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z}$$

ולכן,

$$z + \frac{1}{z} = z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$: ידוע ש- $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$.

$$z + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{z}$$

$$z + \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z} + \frac{z}{|\bar{z}|^2}$$

$\Downarrow$

$$z - \frac{z}{|z|^2} = \bar{z} - \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$\Downarrow$

$$z(1 - \frac{1}{|z|^2}) = \bar{z}(1 - \frac{1}{|z|^2})$$

מתי z פתרון?

או ש- $|z|^2 = 1$ כלומר $|z| = 1$. אחרת, $z = \bar{z}$ ולכן z ממשי.
תרגיל 6: להוכיח את הזהות:

$$\forall z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \left| \frac{z}{|z|} - |z|w \right| = \left| \frac{w}{|w|} - |w|z \right|$$

פתרון: נעלה בריבוע:

$$\left| \frac{z}{|z|} - |z|w \right|^2 \stackrel{?}{=} \left| \frac{w}{|w|} - |w|z \right|^2$$

$$\left(\frac{z}{|z|} - |z|w\right) \left(\frac{\bar{z}}{|z|} - |z|\bar{w}\right) \stackrel{?}{=} \left(\frac{w}{|w|} - |w|z\right) \left(\frac{\bar{w}}{|w|} - |w|\bar{z}\right)$$

$$\frac{z\bar{z}}{|z|^2} - \frac{z}{|z|}|z|\bar{w} - |z|w\frac{\bar{z}}{|z|} + |z|^2w\bar{w} \stackrel{?}{=} \frac{w\bar{w}}{|w|^2} - \frac{w}{|w|}|w|\bar{z} - |w|z\frac{\bar{w}}{|w|} + |w|^2z\bar{z}$$

והכל מצטמצם.