

Chevalley

חבורות

הכרזת

14.3.17

Roger Carter:

ספר מומלץ:

"Simple Groups of Lie Type"

פסקה 1: החבורות הקלאסיות

1.1: החבורות בילינריות

K - שדה
 $GL_n(K)$ - חבורת המטריצות ההפיכות $n \times n$ מעל K .

$$\{ \lambda \cdot I_n \mid \lambda \in K^* \} \cong K^* = Z(GL_n(K))$$

- מרכז החבורה

$$PGL_n(K) := \frac{GL_n(K)}{Z(GL_n(K))}$$

$$\det: GL_n(K) \rightarrow K^*$$

הדטרמיננט

$$SL_n(K) := \ker(\det) \triangleleft GL_n(K)$$

$$\frac{GL_n(K)}{SL_n(K)} \cong K^* \quad \text{גלילי 1 בקרב}$$

$$Z(SL_n(K)) = \{ \lambda I_n \mid \lambda^n = 1 \} = Z(GL_n(K)) \cap SL_n(K)$$

$$PSL_n(K) := \frac{SL_n(K)}{Z(SL_n(K))} = \frac{SL_n(K)}{Z(GL_n(K)) \cap SL_n(K)}$$

נניח כי $K = \mathbb{F}_q$ שדה סופי.
 נחשב את כמות האיברים בחבורת ה"ז"ל:

$$|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1) \cdot (q^n - q) \cdot \dots \cdot (q^n - q^{n-1})$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 בחירה של e_1 - $\mathbb{F}_q^* - \{0\}$ $\rightarrow$ $q-1$ אפשרויות
 בחירה של e_2 - $\mathbb{F}_q^* - \text{Span}_{\mathbb{F}_q} Ae_1$ $\rightarrow$ $q-1$ אפשרויות
 ...

$$= q^{\frac{1}{2}n(n-1)} \cdot \prod_{i=1}^n (q^i - 1)$$

$$|PGL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|Z(GL_n(\mathbb{F}_q))|} = \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|\mathbb{F}_q^*|} = q^{\frac{1}{2}n(n-1)} \cdot \prod_{i=2}^n (q^i - 1)$$

$$|PSL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{|SL_n(\mathbb{F}_q)|}{|Z(SL_n(\mathbb{F}_q))|} = \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|\mathbb{F}_q^*|} = \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|\mathbb{F}_q^*|}$$

~~...~~

$$= \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|\mathbb{F}_q^*|} = \frac{q^{\frac{1}{2}n(n-1)} \cdot \prod_{i=2}^n (q^i - 1)}{\gcd(q-1, n)}$$

$\uparrow$
 $\mathbb{F}_q^*$ זיקל

משפט 1: K שדה סופי, $PSL_n(K)$ חבורה פארה $\forall n \geq 2$.

2. $PSL_n(\mathbb{F}_q)$ פארה פה למקרים $PSL_n(\mathbb{F}_2)$, $PSL_n(\mathbb{F}_3)$

2: החבורה הסימפלקטית

K - שדה, $\text{char}(K) \neq 2$

עבור $g \in GL_n(K)$ נוסח g^T , $n \in \mathbb{Z}$
 סביר להניח שהקרה ולקיות transpose , בעזרת מתחבול!

$GL_n(K)$ פועל על $Mat_n(K)$ דרך $g \cdot S = g^T S g$ הפיכה

$Mat_n(K) = \text{Sym}_n(K) \oplus \text{Skew}_n(K)$; $g^T S g = S^* g$
 האקספרסיה - סימטרית הפעולה שומרת על הפיכות ואנטי סימטריות/סימטריות.

$$J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

החבורה הסימפלקטית - $Sp_{2n}(K)$

$$Sp_{2n}(K) := \text{Stab}_{GL_{2n}(K)}(J_{2n}) = \{g \in GL_{2n}(K) \mid g^T J_{2n} g = J_{2n}\}$$

החבורה הסימפלקטית הפרויקטיבית - $PSp_{2n}(K)$

$$PSp_{2n}(K) := Sp_{2n}(K) / Z(Sp_{2n}(K)) ; Z(Sp_{2n}(K)) = \{\pm I_{2n}\}$$

(תצפית)

$$Sp_2(K) = SL_2(K) \quad \text{אם } K \text{ קוויי}$$

$$Sp_{2n}(K) \leftarrow \left[\left\{ \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{-T} \end{pmatrix} \mid g \in GL_n(K) \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} I_n & x \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \mid x \in \text{Sym}_n(K) \right\} \right]$$

↑
גזר חבורה (נוכחיות)

בפסלון מרחבים וקטוריים:

V ו- K שדה

$V \times V \rightarrow K$: b
 תבנית בינארית (אנטי-סימטרית)

שדה K נייטר

($\dim V = 2n$ בממד צדדי נוגד)

$$\left(\begin{array}{c} V \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_K(V, K) \\ v \mapsto (u \mapsto b(v, u)) \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{שדה} \\ \text{מיון} \end{array}$$

אנטי-סימטריות

$$\{v_1, \dots, v_n, v_{-1}, \dots, v_{-n}\} \quad \bar{V} \quad \int_0^1 0.02 \quad n''p$$

$$b(v_i, v_j) = 0$$

$$b(v_i, v_j) = 0$$

$$b(v_i, v_j) = \delta_{ij}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} (b(v_i, v_j)) & b(v_i, v_j) \\ \hline b(v_i, v_j) & b(v_{-i}, v_{-j}) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \textcircled{11} & I_n \\ \hline -I_n & \textcircled{21} \end{array} \right)$$

$$S_p(V, b) = \left\{ T \in \text{Aut}_K V \mid \begin{array}{l} b(Tu, Tv) \\ = b(u, v) \\ \forall u, v \in V \end{array} \right\}$$

צורה גליליאה:
$$b(u, v) = {}^t[u]_B \left(b(u_i, u_j) \right) [v]_B$$

$$2 \leq n \quad \text{of } \text{PS}_{P_2}(K) \text{ of } \text{PS}_{P_4}(\mathbb{F}_2) \quad \text{of } \text{PS}_{P_2}(K) \text{ of } \text{PS}_{P_4}(\mathbb{F}_2)$$

$$\begin{pmatrix} -\int_1^{\infty} \frac{1}{t} dt \\ \int_1^{\infty} \frac{1}{t} dt \end{pmatrix} Sp_{2n}(K) \longrightarrow \text{הקבוצה של המטריצות} \quad (\text{char } K = 2)$$

$$Sp_{2n}(K) \subset SL_{2n}(K) \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \in Sp_{2n}$$

3.1: החבורה האורתוגונלית

$\text{char } K \neq 2$

$S \in M_n(K)$ הפיכה וסימטרית.

$$GL_n(K) \curvearrowright M_n(K)$$

$$g \mapsto (S \mapsto {}^t g S g)$$

• מיון מתקין - החפיף תלוי בסימ. (עיקרי 2) כי חופף משמרה לכנסת "קיימת" סימטרי.

* K שדה אברי (משמרים כל מספר הן חיובי)

$\frac{1}{2}$ S חופף $I_n - S$.

$$K=R \Rightarrow S \text{ חופף } I_n - S \text{ (סימטרי)}$$

$$\begin{pmatrix} & I_\ell \\ & 1 \\ I_\ell & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_\ell \\ \\ I_\ell \end{pmatrix}$$

$n=2\ell+1 \qquad n=2\ell$

אין נרשם במקום הבאים:

* החבורה האורתוגונלית (הזוגית בחופף S)

$$O_n(K, S) := \{g \in GL_n(K) \mid {}^t g S g = S\}$$

החבורה $\mathbb{Z} \curvearrowright O_n = \{ \pm I_n \}; SO_n(K, S) = O_n(K, S) \cap SL_n(K)$

החבורה $\Omega_n(K) = [O_n(K, S), O_n(K, S)]$

$$\Omega_n(K) \subseteq SO_n(K)$$

$$Z(\Omega_n(K)) = \Omega_n(K) \cap \{\pm I_n\}$$

$$5 \leq n \quad \text{בסדרה של} \quad \frac{\Omega_n(K)}{Z(\Omega_n(K))} \quad \text{משפטים}$$

יובח גסל במקרה כלי של חזית

$$\equiv \text{הקורס מתייחס} \quad \text{עכשיו} \quad \equiv$$

פירוק: Weyl תהיה

ב-1: מערכות (root systems)

$(V, (\cdot, \cdot))$ מרחב וקטורי מממנל מ $\mathbb{R}$

W_α תהיה שיקוף (reflection) מ V ,
ההגדרה לוקח $\alpha \neq 0$

$$\begin{cases} W_\alpha(v) = v & \text{על } v \perp \alpha \\ W_\alpha(u) = -u & \text{על } u \parallel \alpha \end{cases}$$

$$W_\alpha(v) = v - \frac{2\langle \alpha, v \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \cdot \alpha \Leftarrow$$

הצגה: $\phi \in V$ קוורטר ספיר של וקטור $\alpha \neq 0$.
נאמר כי ϕ מרחב ספיר ב- V אם:

א. ϕ פורקט מ V .

ב. $W_\alpha(\phi) \neq \phi$ על $\alpha \in \phi$.

ג. $\frac{2\langle \alpha, v \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}$ על $\alpha, v \in \phi$.

ד. אם $\lambda \neq \pm 1$ אז $\lambda \alpha \notin \phi$.

דוגמה אחרת

(1) $R^{l+1} = \{e_1, e_2, \dots, e_{l+1}\}$ הם הבסיס הסטנדרטי.

ל R נגד $V = \left\{ \sum_{i=1}^{l+1} x_i e_i \mid \sum_{i=1}^{l+1} x_i = 0 \right\}$

ההתפלגות הסטנדרטית.

$$\Phi = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i < j \leq l+1\}$$

יש להוכיח שהם בסיס, נבדוק:

(בבוקר)

1. בלינר (פחית)

2. $\frac{2 \langle e_i - e_j, e_r - e_s \rangle}{\|e_i - e_j\|^2} = \langle e_i - e_j, e_r - e_s \rangle$

היכן $\rightarrow = \delta_{i,r} - \delta_{i,j} - \delta_{j,r} + \delta_{j,s} \in \mathbb{Z}$

3. $W_{e_i - e_j}(e_r - e_s) = e_r - e_s - (\delta_{i,r} - \delta_{i,j} - \delta_{j,r} + \delta_{j,s})(e_i - e_j)$

$$= \begin{cases} e_r - e_s & j, i \neq r, s \\ e_r - e_s - 2(e_i - e_j) & \begin{matrix} j \neq r \\ i \neq s \end{matrix} \left(\begin{matrix} i=r \\ j=s \end{matrix} \right) \\ = e_s - e_r & \\ e_r - e_s - (e_i - e_j) & \left(\begin{matrix} i=r \\ j \neq s \end{matrix} \right) \\ = e_j - e_i & \end{cases}$$

3. בלינר $\lambda = \pm 1 \Rightarrow \lambda(e_i - e_j) = e_i - e_j$

2) $V = \mathbb{R}^l$ עם מכפלה פנימית סטנדרטית

$$\Phi = \left\{ \pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq l \right\} \cup \left\{ \pm e_i \mid 1 \leq i \leq l \right\}$$

B_l

(סדרה $2l^2$)

יש מערכת קוסינוס וסינוס

ניתן לבנות בסיס Φ כך:

$$\Phi = \left\{ v = \sum_{i=1}^l x_i e_i \mid x_i \in \mathbb{Z}, \|v\|^2 \in \{1, 2\} \right\}$$

(במקרה של $l=1$ יש סינוס)

ל. בדרך כלל Φ פורמט $\mathbb{R}^l$

$$u, v \in \Phi \Rightarrow \frac{2\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} = \langle u, v \rangle / 2 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$$

$$u, v \in \Phi \Rightarrow w_u(v) = v - \frac{2\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} u \in \sum_{i=1}^l \mathbb{Z} e_i$$

$$\|w_u(v)\|^2 = \|v\|^2 \Rightarrow w_u(\Phi) \subseteq \Phi$$

3. בדרך

$$\Phi = \left\{ \pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq l \right\} \cup \left\{ \pm e_i \mid 1 \leq i \leq l \right\}, V = \mathbb{R}^l \quad (3)$$

C_l יש מערכת קוסינוס (תכונה) וסינוס

$$\Phi = \left\{ \pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq l \right\}, V = \mathbb{R}^l \quad (4)$$

D_l

יש מערכת קוסינוס (תכונה) וסינוס

ובלב, במרחב מטריק (צורה בדיקה) כל האנ "וילא צופן"

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^3 x_i e_i \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^3 x_i = 0 \right\} \quad (5)$$

$$\phi = \left\{ e_i - e_j \mid 1 \leq i \neq j \leq 3 \right\} \cup \left\{ \pm (2e_i - e_j - e_k) \right\}_{\substack{i,j,k \\ p,j,k}}$$

G_2 $\rightarrow$ מרחב מטריק, מטריק
(פרק 12)

$$\phi = \left\{ v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \mid \begin{array}{l} x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \|v\|^2 \in \{2, 6\} \end{array} \right\} \text{ כ"ה}$$

כ"ה ϕ מרחב מטריק:

א. בבור, ϕ פתח $\rightarrow$ V

$$\frac{2\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} = \langle u, v \rangle \in \mathbb{Z} \quad \text{ע.}$$

$\uparrow$
 $u = e_i - e_j$

$$= \frac{\langle 2e_i - e_j - e_k, v \rangle}{3} \in \mathbb{Z} \quad \text{(אינדי טיפוס)}$$

$\uparrow$
 $u = 2e_i - e_j - e_k$

$$W_u(v) = v - \frac{2\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} e_i \in \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \mathbb{Z}e_3 \quad \text{א.}$$

לכל W_u מרחב מטריק:

$$\|W_u(v)\|^2 = \|v\|^2 \in \{2, 6\}$$

3. פתח $\rightarrow$ בדיקה.