חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

29 במרץ 2017

1 מרחב משיק

תזכורת תהי $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ עקומה חלקה, ונסמן $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$. אזי הווקטור

$$\gamma'(t) = \dot{\gamma}(t) = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$$

נקרא ווקטור המהירות של γ בזמן $t \in I$.

הגדרה 1.1 תהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k מימדית, ותהי $x \in M$. וקטור $v \in \mathbb{R}^n$ נקרא <u>וקטור משיק</u> ליריעה M בנקודה x אם קיימת עקומה חלקה

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

כך שמתקיים

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= x \\ \gamma'(0) &= v \end{aligned}$$

סימון נסמן $T_x M$ את אוסף כל הווקטורים המשיקים ליריעה M בנקודה x. זה נקרא <u>המרחב המשיק</u>.

דוגמאות תהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה (יריעה ממימד n בתוך $\mathbb{R}^n$). אזי לכל $x \in U$ מתקיים $T_x U = \mathbb{R}^n$. נניח כי $f : U \to \mathbb{R}^m$ חלקה. אם $x \in U$ אזי $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ העתקה לינארית. אפשר להגדיר את הדיפרנציאל באופן טבעי:

$$Df(x) : T_x U \to T_{f(x)} \mathbb{R}^m$$

אם $v \in T_x u$ אזי ניקח עקומה חלקה $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma'(0) = v$, ונגדיר

$$Df(x)(v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |_{t=0} \, f(\gamma(t))$$

מכלל השרשרת נקבל שקילות:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mid_{t=0} f\left(\gamma\left(t\right)\right)=Df\left(x\right)\gamma'\left(0\right)=Df\left(x\right)\left(v\right)$$

תהי $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ממימד k, $f:M\to\mathbb{R}^{m}$ העתקה חלקה. אם $x\in M$ אזי

$$Df\left(x\right):T_{x}M\to T_{f\left(x\right)}\mathbb{R}^{m}$$

מוגדר בעזרת אותה הגדרה כמו בדוגמה.

כעת, יהיו $M_{1}\subseteq\mathbb{R}^{n_{1}},M_{2}\subseteq\mathbb{R}^{n_{2}}$ יריעות. תהי $f:M_{1}\to M_{2}$ חלקה. אפשר להגדיר לכל $x\in M$ את

$$Df\left(x\right):T_{x}M_{1}\to T_{f\left(x\right)}M_{2}$$

1.1 תיאור מפורש של המרחב המשיק

1.1.1 פרמטריזציה

תהי $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k מימדית. יהי $x\in M$, ותהי $r:V\to M$ מפה, עם $x\in r\left(V\right)$. נסמן $a=r^{-1}\left(x\right)$. כעת, אם $v\in T_{x}M$, ניקח

$$\gamma:\left(-\varepsilon,\varepsilon\right)\to M$$

שמקיימת $\gamma\left(0\right)=x$, $\gamma'\left(0\right)=v$. קיים $\delta>0$ עבורו $\gamma\left(\left(-\delta,\delta\right)\right)\subseteq r\left(V\right)$, וכעת נגדיר

$$\alpha:\left(-\delta,\delta\right)\to V$$
$$\alpha\left(t\right)=r^{-1}\left(\gamma\left(t\right)\right)$$

וכמובן שזו העתקה חלקה. נכתוב

$$\alpha\left(t\right)=\left(\alpha_{1}\left(t\right),\ldots,\alpha_{k}\left(t\right)\right)$$

כעת

$$\gamma\left(t\right)=r\left(\alpha\left(t\right)\right)$$

וכעת נוכל להשתמש בכלל השרשרת:

$$v=\gamma'\left(0\right)=Dr\left(a\right)\left(\alpha'\left(0\right)\right)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_{i}'\left(0\right)r_{q_{i}}\left(a\right)$$

כאשר $\{q_i\}$ הן הקואורדינטות בתוך V. אזי

$$Dr\left(a\right):T_aV\to T_xM$$

העתקה חד־חד־ערכית ועל, וכן T_xM הוא מרחב לינארי k מימדי בתוך $\mathbb{R}^n$ שנפרס על ידי הווקטורים $r_{q_1}\left(a\right),\ldots,r_{q_k}\left(a\right)$.

1.1.2 הצגה סתומה

תהי $M\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k מימדית. תהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה, ותהי $F:U\to\mathbb{R}^{n-k}$ העתקה חלקה המקיימת

$$M\cap U=\left\{z\in U\mid F\left(z\right)=0\right\}$$

ניקח $x\in M\cap U$. F היא רגולרית בנקודה x, כעת ניקח $v\in T_xM$, ומסילה

$$\begin{gathered}\gamma:\left(-\varepsilon,\varepsilon\right)\to M\\ \gamma\left(0\right)=x\\ \gamma'\left(0\right)=v\end{gathered}$$

אנחנו יודעים כי

$$F\left(\gamma\left(t\right)\right)=0$$

עבור t קטן מספיק. נגזור לפי t ונקבל

$$DF\left(x\right)\left(\gamma'\left(0\right)\right)=DF\left(x\right)v=0$$

קיבלנו כי

$$T_xM\subseteq\ker\left(DF\left(x\right)\right)$$

שני אלה מרחבים לינאריים. המימד של T_xM הוא k (כמו שראינו בהצגה הפרמטרית), והדיפרנציאל מדרגה מקסימלית, ולכן גם $\ker\left(DF\left(x\right)\right)$ הוא ממימד k. לכן בסך הכל

$$T_xM=\ker\left(DF\left(x\right)\right)$$

נניח לרגע כי M ממימד $n-1$ (על־משטח). במקרה זה $F:U\to\mathbb{R}$, ואז

$$T_xM=\left\{v\in\mathbb{R}^n\mid\left(v,\nabla F\left(x\right)\right)=0\right\}$$