חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

ⓒ ארזים

27 במרץ 2017

בשיעור שעבר סיימנו לראות קריטריונים שקולים לכך שקבוצה היא יריעה.

מסקנה 0.1 אם לקבוצה יש הצגה פרמטרית טובה או הצגה סתומה טובה אזי היא יריעה (כי מספיק מקומית).

עד עכשיו דיברנו על יריאות בעלות מימד $0 < k < n$. יש משמעות לדיבור גם על $k = 0$ או $k = n$. נשתמש בהגדרה השנייה: לכל $x \in M$ קיימת סביבה $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ודיפאומורפיזם $\varphi : U \to \varphi(U)$ המקיימת

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}\right)$$

"נסכים" שמתכוונים לדבר הבא:

$$\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\} = \begin{cases} 0_n & k = 0 \\ \mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\} & 0 < k < n \\ \mathbb{R}^n & k = n \end{cases}$$

הגדרה 0.2 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ היא יריעה n מימדית אם M קבוצה פתוחה בתוך $\mathbb{R}^n$.
$M \subseteq \mathbb{R}^n$ היא יריעה 0 מימדית אם M אוסף בן מניה של נקודות מבודדות:

$$\forall x \in M \exists \varepsilon > 0 \ \ M \cap B(x_0, \varepsilon) = \{x_0\}$$

הגדרה 0.3 תהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k מימדית, ויהי $V \subseteq \mathbb{R}^k$ תחום. העתקה $r : V \to M$ תיקרא <u>מפה</u> אם היא חד־חד־ערכית, חלקה, ורגולרית.

תכונות הוכיחו כתרגיל:

1. אם $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : A \to B$ העתקה, אזי f רציפה אם ורק אם לכל קבוצה פתוחה יחסית $S \subseteq B$, גם $f^{-1}(S) \subseteq A$ פתוחה יחסית.
2. אם $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $S_\alpha \subseteq A$ לכל $\alpha \in I$, וכל S_α פתוחה יחסית בתוך A, אזי $S = \bigcup S_\alpha$ פתוחה יחסית בתוך A.

3. קבוצה $V\subseteq\mathbb{R}^k$ היא פתוחה בתוך $\mathbb{R}^k$ אם ורק אם $V\times\{0_{n-k}\}$ פתוחה יחסית בתוך $\mathbb{R}^k\times\{0_{n-k}\}$.

טענה 0.4 תהי M יריעה k מימדית, $r:V\to M$ מפה. אזי:

1. $r\left(V\right)$ פתוחה יחסית בתוך M.
2. $r:V\to r\left(V\right)$ הומיאומורפיזם.

הוכחה: $r:V\to r\left(V\right)$ רציפה. תהי $a\in V$, $x_0=r\left(a\right)$. קיימת סביבה U של x_0 ודיפאומורפיזם $\phi:U\to\phi\left(U\right)$, המקיים

$$\phi\left(U\cap M\right)=\phi\left(U\right)\cap\left(\mathbb{R}^k\times\{0_{n-k}\}\right)$$

כעת,

$$\phi\left(U\cap M\right)=W\times\{0_{n-k}\}$$

כאשר W פתוחה. כמו כן, נגדיר את f, עבור $q\in V$ מספיק קרוב לנקודה a, בתור

$$\phi\left(r\left(q\right)\right)=\left(f\left(q\right),0_{n-k}\right)$$

לכן

$$D\left(\phi\circ r\right)\left(a\right)=\underbrace{D\phi\left(x_0\right)}_{\mathrm{rk}=n}\underbrace{Dr\left(a\right)}_{\mathrm{rk}=k}$$

ולכן דרגת הדיפרנציאל מקסימלית, וכעת

$$\mathrm{rk}Df\left(a\right)=\mathrm{rk}D\left(\phi\circ r\right)=k$$

כלומר $Df\left(a\right)$ הפיך. ממשפט הפונקציה ההפוכה קיימת סביבה $V_1\subseteq V$ של a וקבוצה פתוחה $W_1\subseteq W$ כך שהצמצום $f\mid_{V_1}:V_1\to W_1$ דיפאומורפיזם, ובפרט הומיאומורפיזם. בפרט, אם $B\subseteq V$ כדור מספיק קטן שמכיל את a, אזי $f\left(B\right)\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה. לכן גם

$$f\left(B\right)\times\{0_{n-k}\}=\phi\left(r\left(B\right)\right)$$

היא פתוחה יחסית בתוך $\mathbb{R}^k\times\{0_{n-k}\}$. אזי

$$f\left(B\right)\times\{0_{n-k}\}=\left(\mathbb{R}^k\times\{0_{n-k}\}\right)\cap U'$$

כאשר U' פתוחה בתוך $\mathbb{R}^n$. כעת,

$$\begin{aligned}r\left(B\right)&=\phi^{-1}\left(\phi\left(r\left(B\right)\right)\right)=\phi^{-1}\left(\mathbb{R}^k\times\{0_{n-k}\}\right)\cap\phi^{-1}\left(U'\right)=U\cap M\cap\phi^{-1}\left(U'\right)=\\&=M\cap\phi^{-1}\left(U'\right)=r\left(V\right)\cap\phi^{-1}\left(U'\right)\end{aligned}$$

וזאת שכן $r\left(B\right)\subseteq r\left(V\right)$. קיבלנו כי לכל $a\in V$, ולכל כדור פתוח קטן מספיק $a\in B$, $r\left(B\right)$ פתוחה יחסית בתוך M וגם בתוך $r\left(V\right)$. לכן לכל קבוצה פתוחה $V'\subseteq V$, התמונה $r\left(V'\right)$ פתוחה יחסית בתוך $r\left(V\right)$ ובתוך M. לכן

$$r^{-1}:r\left(V\right)\to V$$

רציפה, וגם אם $V'=V$, אזי $r\left(V\right)$ פתוחה יחסית בתוך M. ■

מסקנה 0.5 תהי $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k מימדית. תהי $r:V\to M$ מפה. אזי לכל $a\in V$ קיימת סביבה של $\left(a,0_{n-k}\right)\in\mathbb{R}^{n}$ ודיפאומורפיזם $\psi:W\to\psi\left(W\right)$, כאשר $\psi\left(W\right)\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה, שמקיים:

1.

$$W\cap\left(\mathbb{R}^{k}\times\left\{0_{n-k}\right\}\right)\subseteq V\times\left\{0_{n-k}\right\}$$

2.

$$\psi\left(W\cap\left(\mathbb{R}^{k}\times\left\{0_{n-k}\right\}\right)\right)=\psi\left(W\right)\cap M$$

3. עבור $\left(q,0_{n-k}\right)\in W$,

$$\psi\left(q,0_{n-k}\right)=r\left(q\right)$$

מסקנה 0.6 תהי $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k מימדית ותהי $r:V\to M$ מפה. תהי $G\subseteq\mathbb{R}^{m}$ קבוצה פתוחה ותהי $h:G\to\mathbb{R}^{n}$ כך שמתקיים $h\left(G\right)\subseteq r\left(V\right)$. אזי h חלקה אם ורק אם $r^{-1}\circ h:G\to V$ חלקה.

הוכחה: תהי $a\in G$, $x_{0}=h\left(a\right)\in r\left(V\right)$, $q_{0}=r^{-1}\left(x_{0}\right)\in V$. לפי המסקנה הקודמת, קיימת סביבה W של $\left(q_{0},0_{n-k}\right)$ בתוך $\mathbb{R}^{n}$ ודיפאומורפיזם $\psi:W\to\psi\left(W\right)$ כך שמתקיים

$$\psi\left(W\cap\left(\mathbb{R}^{k}\times\left\{0_{n-k}\right\}\right)\right)=\psi\left(W\right)\cap M$$

וכך שמתקיים $\psi\left(q,0_{n-k}\right)=r\left(q\right)$. כעת, $\psi^{-1}\left(h\left(y\right)\right)=\left(r^{-1}\left(h\left(y\right)\right),0_{n-k}\right)$ לכל y בסביבה של a. לכן אם h חלקה בסביבה של a אזי $\psi^{-1}\circ h$ חלקה בסביבה של a, וזה שקול לחלקות של $r^{-1}\circ h$ סביב a.

בכיוון השני, אם $r^{-1}\circ h$ חלקה בסביבת a, נרכיב עם r ונקבל כי h חלקה שם. ■

מסקנה 0.7 תהי $M\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k מימדית, $r_1:V_1\to M$,$r_2:V_2\to M$ מפות. נניח כי $r_1(V_1)\cap r_2(V_2)=\emptyset$. אזי

$$r_2^{-1}\circ r_1:r_1^{-1}(r_1(V_1)\cap r_2(V_2))\to r_2^{-1}(r_1(v_1)\cap r_2(V_2))$$

היא דיפאומורפיזם בין שתי קבוצות פתוחות בתוך $\mathbb{R}^k$.

הוכחה: $r_1(V_1),r_2(V_2)$ פתוחות יחסית בתוך M. נסמן

$$r_1(V_1)=M\cap U_1$$
$$r_2(V_2)=M\cap U_2$$

נגדיר

$$\Sigma=r_1(V_1)\cap r_2(V_2)=M\cap U_1\cap U_2$$

כעת,

$$r_1^{-1}(\Sigma)=r_1^{-1}(U_1\cap U_2)$$
$$r_2^{-1}(\Sigma)=r_2^{-1}(U_1\cap U_2)$$

לכן $r_1^{-1}(\Sigma),r_2^{-1}(\Sigma)$ הן פתוחות בתוך $\mathbb{R}^k$. כעת,

$$r_1\mid_{r_1^{-1}(\Sigma)}:r_1^{-1}(\Sigma)\to\mathbb{R}^n$$

חלקה. מכאן, מהמסקנה הקודמת, $r_2^{-1}\circ r_1$ חלקה גם כן. באופן סימטרי, גם $r_1^{-1}\circ r_2$ חלקה. ■

הגדרה 0.8 תהי $M\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k מימדית, $f:M\to\mathbb{R}^n$. אזי f נקראת <u>חלקה</u> אם לכל מפה $r:V\to M$, ההעתקה $f\circ r:V\to\mathbb{R}^m$ חלקה.

תרגיל תהי $M\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k מימדית, $f:M\to\mathbb{R}^m$. הוכיחו כי f העתקה חלקה אם ורק אם לכל $x\in M$ קיימת סביבה U בתוך $\mathbb{R}^n$ והעתקה חלקה $F:U\to\mathbb{R}^m$ כך שמתקיים $F\mid_{U\cap M}=f\mid_{U\cap M}$.
אתגר: f חלקה על M אם ורק אם קיימת קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{R}^n$ המכילה את M, יחד עם פונקציה חלקה $F:U\to\mathbb{R}^m$ כך שמתקיים $F\mid_M=f$.