חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

ⓒ ארזים

19 ביוני 2017

1 פוקנציות מרוכבות

משפט 1.1 (קושי־גרין) יהי $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום חסום, $\partial G = \Gamma$ היא C^1 למקוטעין, ונניח כי $f : G \to \mathbb{C}$ פונקציה C^1. אזי לכל $w \in G$ מתקיים

$$f\left(w\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f\left(z\right)}{z-w}\,\mathrm{d}z-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G}\frac{\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}}{z-w}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

הוכחה: רוצים להשתמש במשפט גרין לפונקציה $f : G \to \mathbb{C}$:

$$\int\limits_{\Gamma}f\,\mathrm{d}z=\int\limits_{\Gamma}u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+i\left(u\mathrm{d}y+v\mathrm{d}x\right)$$

כאשר $f = u + iv$, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$. כעת, ממשפט גרין לחלק הממשי והמדומה בנפרד נקבל

$$\int\limits_{\Gamma}f\,\mathrm{d}z=\int\limits_{\Gamma}u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+i\left(u\mathrm{d}y+v\mathrm{d}x\right)=\iint\limits_{G}\left(-\left(u_{y}+v_{x}\right)+i\left(u_{x}-v_{y}\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$
$$=2i\int\limits_{G}\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

כאשר $\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. כעת, נפעיל את מה שקיבלנו עבור הפונקציה $z \mapsto \frac{f(z)}{z-w}$ ועבור התחום $G_{\varepsilon}=\left\{ z\in G\mid\left|z-w\right|>\varepsilon\right\}$ (כאשר $\varepsilon<\mathrm{dist}\left(w,\partial G\right)$). בתחום זה:

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\frac{f\left(z\right)}{z-w}=\frac{\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}}{z-w}$$

שכן $\frac{1}{z-w}$ אנליטית בכל G_{ε}. אזי ממה שראינו מתקיים

$$2i\iint\limits_{G_{\varepsilon}}\frac{\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}}{z-w}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_{\partial G_{\varepsilon}}\frac{f\left(z\right)}{z-w}\,\mathrm{d}z$$

כעת, $\partial G_\varepsilon = \Gamma \backslash \{|z-w| = \varepsilon\}$, ולכן

$$\int_{\partial G_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z - \int_0^{2\pi} f\left(w+\varepsilon e^{i\theta}\right) i\,\mathrm{d}\theta$$

כאשר החלפנו $z = w + re^{i\theta}$ עבור $r = \varepsilon$ על השפה. לוקחים גבול, $\varepsilon \to 0$, ומקבלים מהרציפות של f והאינטגרביליות של $\frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}{z-w}$ את המשפט. ■

1.1 הומוטופיה ולמת פואנקרה

הגדרה 1.2 עקומות $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ עם נקודות קצה זהות $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ נקראות הומוטופיות אם קיימת העתקה רציפה $\gamma : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ כך שמתקיים $\gamma(\cdot, 0) = \gamma_0, \gamma(\cdot, 1) = \gamma_1$, וכן

$$\gamma(0,\cdot) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$$
$$\gamma(1,\cdot) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$$

תרגיל הראו שכל שתי עקומות (עם נקודות קצה זהות) בתוך $\mathbb{R}^n$ הן הומוטופיות. בפרט כל לולאה הומוטופית לנקודה.

כעת, יהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום. ניקח γ_0, γ_1 עקומות בתוך Ω עם נקודות קצה זהות, אזי γ_0, γ_1 הומוטופיות בתוך Ω אם יש בינים הומוטופיה γ עם $\gamma\left([0,1]^2\right) \subseteq \Omega$.

דוגמאות $\gamma_0 = S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ הומוטופית לנקודה. $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ לא הומוטופית לנקודה. מעגל ברדיוס 1 סביב $(2,0)$ כן הומוטופי לנקודה.

הגדרה 1.3 תחום $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ייקרא פשוט קשר אם כל עקומה סגורה (לולאה) היא הומוטופית לנקודה בתוך Ω.

הערה 1.4 פשטות קשר נשמרת תחת הומיאומורפיזם - אם Ω פשוט קשר, $f : \Omega \to \Omega'$ רציפה שההופכית לה מוגדרת היטב ורציפה, אזי גם Ω' פשוט קשר.

משפט 1.5 (אינטגרלים על עקומות הומוטופיות) תהי $\omega = \sum a_i(x)\,\mathrm{d}x_i$ תבנית C^1 בתחום $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ שמקיימת $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$ (סגורה). נניח כי γ_0, γ_1 עקומות C^1 בתוך Ω שהומוטופיות בתוך Ω. אזי

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

הוכחה: ראשית נוכיח עבור מסילות שההומוטופיה ביניהן היא C^1 - כלומר נניח כי γ, ההומוטופיה שלנו, היא גם C^1, ואפילו נניח $\frac{\partial^2\gamma}{\partial t\partial s}$ רציפה ולא תלויה בסדר הנגזרות. אזי

$$\begin{aligned}
\left(\int\limits_{\gamma_1}\omega-\int\limits_{\gamma_0}\omega\right)&=\int\limits_0^1\left(\sum_{i=1}^n a_i\left(\gamma_1\left(t\right)\right)\left(\gamma_1'\left(t\right)\right)_i-\sum_{i=1}^n a_i\left(\gamma_0\left(t\right)\right)\left(\gamma_0'\left(t\right)\right)_i\right)\mathrm{d}t=\\
&=\int\limits_0^1\left(\sum_{i=1}^n a_i\left(\gamma\left(t,s\right)\right)\left(\gamma'\left(t,s\right)\right)_i\right)_{s=0}^{s=1}\mathrm{d}t=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\sum_{i=1}^n a_i\left(\gamma\left(t,s\right)\right)\left(\gamma'\left(t,s\right)\right)_i\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\\
&=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\sum_{i=1}^n a_i\left(\gamma\left(t,s\right)\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_i\left(t,s\right)\right)\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\\
&=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left(\sum_{i,k=1}^n\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\circ\gamma\right)\frac{\partial\gamma_i}{\partial t}\frac{\partial\gamma_k}{\partial s}+\sum_{i=1}^n\left(a_i\circ\gamma\right)\frac{\partial^2\gamma_i}{\partial t\partial s}\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\\
&=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^n a_k\left(\gamma\left(t,s\right)\right)\frac{\partial\gamma_k}{\partial s}\left(t,s\right)\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

במעבר האחרון השתמשנו בנתון על הסגירות של התבנית ובהנחה על התחלפות הנגזרות של γ. האינטגרנד כאן רציף במידה שווה, ולכן אפשר להחליף סדר אינטגרציה. נקבל

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^n a_k\left(\gamma\left(t,s\right)\right)\frac{\partial\gamma_k}{\partial s}\left(t,s\right)\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}t&=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^n a_k\left(\gamma\left(t,s\right)\right)\frac{\partial\gamma_k}{\partial s}\left(t,s\right)\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}s=\\
&=\int\limits_0^1\left(\sum_{k=1}^n a_k\left(\gamma\left(t,s\right)\right)\frac{\partial\gamma_k\left(t,s\right)}{\partial s}\right)_{t=0}^{t=1}\mathrm{d}s=\\
&=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\sum_{k=1}^n\left(a_k\left(\gamma\left(1,s\right)\right)\frac{\partial\gamma_k}{\partial s}\left(1,s\right)-a_k\left(\gamma\left(0,s\right)\right)\frac{\partial\gamma_k}{\partial s}\left(0,s\right)\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

נשים לב שהפונקציות $s\to\gamma_k\left(0,s\right)$, $s\to\gamma_k\left(1,s\right)$ הן קבועות, ולכן הנגזרות יתאפסות כלומר נקבל כאן 0, כמו שרצינו.

נעבור כעת לשלב השני - נבנה הומוטופיה רציפה. נניח כי γ_0,γ_1 בהינתן הומוטופיה C^1 הן C^1 הומוטופיות בתחום Ω על ידי γ שהיא רציפה. נרחיב את γ להיות מוגדרת על ריבוע $[0,1]^2\subsetneq Q=[-\delta,1+\delta]^2$ (למשל אפשר להמשיך באופן קבוע על קרניים - כתרגיל, יש להשתכנע שמבינים איך לעשות את זה). נסמן $\gamma:Q\to\Omega$. יהי $\varepsilon>0$ קטן. נגדיר

$$\gamma_\varepsilon\left(t,s\right)=\frac{1}{4\varepsilon^2}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\int\limits_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon}\gamma\left(\xi,\eta\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

קירוב סטנדרטי של פונקציות רציפות על ידי פונקציה גזירה ברציפות. אזי $\gamma_\varepsilon \in C^1$ והנגזרת המעורבת $\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}$ רציפה ולא תלויה בסדר (בדקו!) כעת,

$$\gamma_\varepsilon (t,s) - \gamma(t,s) = \frac{1}{4\varepsilon^2} \int\limits_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \int\limits_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \left(\gamma(\xi,\eta) - \gamma(s,t)\right) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

וזה במידה שווה במשתנים s,t (על הקומפקט $[0,1]^2$). לכן עבור ε קטן מספיק, $\gamma_\varepsilon\left([0,1]^2\right) \subseteq \Omega$. נשאר לתקן את γ_ε על $\partial [0,1]^2$, כדי שהיא תהיה הומוטופיה עם קצוות קבועים בין γ_0, γ_1. כאשר $t = 0, 1$:

$$\tilde{\gamma}_\varepsilon (t,s) = \gamma_\varepsilon (t,s) - (1-t)\left(\gamma_\varepsilon (0,s) - \gamma_0 (0)\right) - t\left(\gamma_\varepsilon (1,s) - \gamma_0 (1)\right)$$

וכאשר $s = 0, 1$:

$$\tilde{\tilde{\gamma}}_\varepsilon = \gamma_\varepsilon (t,s) - (1-s)\left(\tilde{\gamma}_\varepsilon (t,0) - \gamma_0 (t)\right) - s\left(\tilde{\gamma}_\varepsilon (t,1) - \gamma_1 (t)\right)$$

קיבלנו הומוטופיה שמקיימת $\tilde{\tilde{\gamma}}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \gamma$ במידה שווה. אם כן, סיימנו. ■

מסקנה 1.6 אם ω תבנית C^1 סגורה בתחום פשוט קשר Ω אזי יש לה קדומה (בוחרים נקודת בסיס ואז הערך של הקדומה של ω בנקודה y הוא אינטגרל על ω לאורך מסילה מנקודת הבסיס אל y).

הערה 1.7 המשפט נכון גם עבור γ_0, γ_1 שהן C^1 למקוטעין. במקרה הזה, צריך לקרב במידה שווה את γ_0, γ_1 על ידי $\gamma_{0,\varepsilon}, \gamma_{1,\varepsilon}$ שהן C^1 עם אותן נקודות קצה. בדקו שאם ε קטן מספיק אזי אלה הומוטופיות (ואפשר לחבר את γ_i, $\gamma_{i,\varepsilon}$ עם קטע).

אפשר להכליל אינטגרל של תבניות דיפרנציאליות על עקומות לאינטגרל של k תבניות דיפרנציאליות על יריעות ממימד k. ניזכר באינטגרל קוי: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ ונתונה אחד־תבנית דיפרנציאלית α בסביבת γ. אזי אפשר לחלק את $[a,b]$ לקטעים בגודל $\delta = \frac{b-a}{N}$ (N קטעים) עם $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$, ואז

$$\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_{\gamma(t_i)} \left(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\right) \approx \sum_{i=1}^{N} \alpha_{\gamma(t_i)} \left(\delta\gamma'(t_i)\right) = \sum_{i=0}^{N-1} \delta\alpha_{\gamma(t_i)} \left(\gamma'(t_i)\right) \approx \int\limits_a^b \alpha_{\gamma(t)} \left(\gamma'(t)\right)$$

כעת, נרצה אנלוגיה עבור משטח דו מימדי $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$, כלומר יריעה חלקה עם פרמטריזציה $r : G \to \mathbb{R}^3$, $G \subseteq \mathbb{R}^2$, $r(G) = \Sigma$. נחלק את המישור $\mathbb{R}^2$ לריבועים בעלי אורך צלע δ. כתוצאה, נקבל חלוקה של G לתחומים קטנים. לכל קודקוד q (פינה של אחד הריבועים) יש נקודה מתאימה $r(q)$, ממנה יוצאים שני ווקטורים אינפיניטיסימליים: $r(q+\delta e_1) - r(q), r(q+\delta e_2) - r(q)$. כאשר δ הוא קטן אלה הם בערך $\delta r_{q_1}(q), \delta r_{q_2}(q)$ בהתאמה. נצטרך משפחה ω של פונקציונאלים על המרחב המשיק של Σ בכל נקודה: לכל $x \in \mathbb{R}^3$ (או

בסביבה של Σ) נרצה העתקה $\omega_x : T_x\mathbb{R}^3 \times T_x\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (אחר כך נצמצם אל $T_x\Sigma$), ונדרוש שההעתקה הזו תהיה פונקציונאל בי־לינארי. אז נגדיר אינטגרל של ω על Σ על ידי

$$\int_{\Sigma} \omega = \lim_{\delta \to 0} \sum_{q \in G} \omega_{r(q)} \left(\delta r_{q_1}(q), \delta r_{q_2}(q) \right) = \lim_{\delta \to 0} \delta^2 \sum_{q \in G} \omega_{r(q)} \left(r_{q_1}(q), r_{q_2}(q) \right) =$$
$$= \int_{G} \omega_{r(q)} \left(r_{q_1}(q), r_{q_2}(q) \right) \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2$$

תרגיל (חשוב מאוד) ערך האינטגרל שהגדרנו אינו תלוי בפרמטריזציה עם אותה אוריינטציה אם ורק אם הפונקציונלים ω_x הם אנטי סימטריים:

$$\omega_x(\xi, \eta) = -\omega_x(\eta, \xi)$$