חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

12 ביוני 2017

בשיעור שעבר דיברנו על אחד־תבניות דיפרנציאליות, ודנו בשאלה מתי היא מדוייקת (מתי קיימת לה קדומה). ראינו למשל שאם כל אינטגרל על עקום סגור מתאפס, אז היא מדוייקת. ראינו תנאי הכרחי אך לא מספיק לדיוק:

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

ראינו גם ניסוח של המשפט הבא:

משפט 0.1 (הלמה של פואנקרה) אם $U \subseteq \mathbb{R}^n$ כדור או $U = \mathbb{R}^n$ (יש עוד מקרים), אזי התנאי הזה מספיק לדיוק התבנית $\omega = \sum a_i(x)\,\mathrm{d}x_i$.

הוכחה: נוכיח עבור כדור היחידה, אבל מכאן ינבע לכל תחום קמור. נניח שהתנאי מתקיים. ניזכר שראינו שאם $\omega = \mathrm{d}f$ אזי

$$f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0 \to x} \omega$$

לכן לכל $x \in U$ נגדיר את f כך: ניקח

$$\begin{aligned} \gamma_x &: [0,1] \to U \\ \gamma(t) &= tx \end{aligned}$$

ואז נגדיר

$$f(x) = \int\limits_{\gamma_x} \omega$$

כעת, אם $\omega = \sum a_i \mathrm{d}x_i$, אזי

$$\begin{aligned} f(x) &= \int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_0^1 \omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^n x_i a_i(tx)\,\mathrm{d}t = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \int\limits_0^1 a_i(tx)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

כעת נכתוב

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_k} &= \int_0^1 a_k\left(tx\right)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^1 a_i\left(tx\right)\,\mathrm{d}t\right) = \\
&= \int_0^1 a_k\left(tx\right)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \frac{\partial a_i}{\partial x_k}\left(tx\right)\cdot t\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^1 a_k\left(tx\right)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\left(tx\right)\cdot t\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^1 a_k\left(tx\right)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^1 a_k\left(tx\right)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a_k\left(tx\right)\right)\right)\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^1 a_k\left(tx\right)\,\mathrm{d}t - \left[ta_k\left(tx\right)\right]_{t=0}^{1} - \int_0^1 a_k\left(tx\right)\,\mathrm{d}t = \\
&= a_k\left(x\right)
\end{aligned}$$

ולכן אכן מתקיים $\omega = \mathrm{d}f$. ■

השיעור המשיך בדיון של הקבלה של התורה לעולם של פונקציות מרוכבות, משפט קושי, נוסחאות קושי רימן וכדומה. כמובן שזו לא דרישת קדם ולכן זה לא חומר של הקורס, אלא רק למחשבה של מי שמכיר.

תרגיל ניקח את $\omega = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + 4\mathrm{d}z$, שמקיימת את תנאי למת פואנקרה. לכן יש לה קדומה f. נחפש אותה:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 4$$

נקבל מהמשוואה הראשונה:

$$f\left(x,y,z\right) = xy + g\left(y,z\right)$$

נגזור לפי y:

$$x = x + \frac{\partial g}{\partial y}$$

ולכן g לא תלויה במשתנה y. לבסוף,

$$4=0+\frac{\partial g}{\partial z}$$

ולכן $g=4z+c$ ואז

$$f=xy+4z+c$$

כעת, נדון על הקשר בין שדה ווקטורי ותבניות. שדה ווקטורי F בתוך $\mathbb{R}^n$ מגדיר אחד־תבנית דיפרנציאלית על ידי

$$\omega_x\left(\xi\right)=\left\langle F\left(x\right),\xi\right\rangle$$

במצב זה

$$\int\limits_{\gamma}\omega=\int\limits_{\gamma}\left\langle F\left(\gamma\left(t\right)\right),\gamma'\left(t\right)\right\rangle\,\mathrm{d}t$$

הגדרה 0.2 שדה ווקטורי F במרחב נקרא שדה משמר אם "העבודה של שדה כח F לפי עקומה תלויה רק בקצוות" ־ כלומר האינטגרל האחרון שחישבנו תלוי רק בערכי F על קצוות העקומה.

1 משפט גרין

יהי $G\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום חסום, עם $\Gamma=\partial G$ איחוד סופי של עקומות חלקות C^1 למקוטעין, זרות ופשוטות ־ נכתוב

$$\Gamma=\gamma_1\cup\cdots\cup\gamma_p$$

ותהי $\alpha=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ אחד־תבנית דיפרנציאלית על $\overline{G}$. אזי

$$\int\limits_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint\limits_{G}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

כמובן שהאינטגרל על Γ נילקח כסכום האינטגרלים על γ_i.

התנאים כאשר "הולכים לפי γ_i" התחום G "נמצא מצד שמאל" (מובן אינטואיטיבית, הכוונה לאוריינטציה של המסילות). כמו כן, כל γ_i היא רגולרית, כלומר הנגזרת שלה לא מתאפסת באף נקודה פרט אולי לנקודות השבירה, שבהן מתחלפות המסילות ־ כלומר בכל נקודה בה המסילה גזירה הנגזרת אינה 0. כמו כן, נוכל לכתוב

$$\begin{aligned}\gamma_i\left(t\right)&=\left(x_i\left(t\right),y_i\left(t\right)\right)\\\gamma_i'\left(t\right)&=\left(x_i'\left(t\right),y_i'\left(t\right)\right)\\v&=\left(y_i'\left(t\right),-x_i'\left(t\right)\right)\end{aligned}$$

ואז נורמל היחידה החיצוני של G בנקודה $\gamma_i\left(t\right)$ הוא

$$N=\frac{1}{\left|\gamma_i\left(t\right)\right|}v$$

נראה כעת את הקשר בין משפט גרין ומשפט הדיברגנץ. נרשום את משפט הדיברגנץ עבור שדה ווקטורי $F=\left(F_1,F_2\right)$ על $\overline{G}$. המשפט אומר

$$\int\limits_{\Gamma}\left\langle F,N\right\rangle\,\mathrm{d}S=\int\limits_{G}\mathrm{div}F\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

על γ_i מתקיים

$$N=\frac{1}{\left|\gamma_i'\left(t\right)\right|}\left(y_i'\left(t\right)-x_i'\left(t\right)\right)$$

ואז

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma}\left\langle F,N\right\rangle\,\mathrm{d}S&=\sum_{i=1}^{p}\int\limits_{a_i}^{b_i}\frac{F_1\left(\gamma_i\left(t\right)\right)y_i'\left(t\right)-F_2\left(\gamma_i\left(t\right)\right)x_i'\left(t\right)}{\left|\gamma_i'\left(t\right)\right|}\left|\gamma_i'\left(t\right)\right|\,\mathrm{d}t=\\&=\sum_{i=1}^{p}\int\limits_{a_i}^{b_i}-F_2\left(\gamma_i\left(t\right)\right)x_i'\left(t\right)+F_1\left(\gamma_i\left(t\right)\right)y_i'\left(t\right)\,\mathrm{d}t=\\&=\sum_{i=1}^{p}\int\limits_{\gamma_i}-F_2\mathrm{d}x+F_1\mathrm{d}y=\int\limits_{\Gamma}-F_2\mathrm{d}x+F_1\mathrm{d}y\end{aligned}$$

וזה כבר ממש הניסוח של משפט גרין עם שמות אחרים. האגף השני הוא כמובן

$$\int\limits_{G}\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

ואז זה בדיוק משפט גרין.