

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

15 במרץ 2017

1 יריעות

בשיעור שעבר ראינו מה זו הצגה פרמטרית: $G \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה, $r : G \rightarrow \mathbb{R}^n$, $M = r(G)$. ראינו את המקרה הפרטי בו $k = 1, n = 2$, $r : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, כאשר $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע פתוח, $M = r(I)$.

ראינו שנדרשים לנו התנאים הבאים:

1. $r : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ הומיאומורפיזם.

2. r חלקה ורגולרית (כלומר לכל $t \in I, r'(t) \neq 0$).

כעת נעבור לדון בהצגה סתומה.

1.1 הצגה סתומה

נמשיך להתמקד במקרה של יריעות חד-מימדיות במישור $\mathbb{R}^2$. לוקחים $U \subseteq \mathbb{R}^2$ פתוחה, וכן $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ חלקה. אנו מתבוננים בקבוצה

$$M = \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = 0\}$$

דוגמאות

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x, y) = xy$. חלקה, וקבוצת האפסים היא איחוד שני הצירים. קבוצה זו לא חלקה - ראשית הצירים היא נקודה בעייתית. כמו כן, $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$, בניגוד לכל נקודה אחרת.

2. $f(x, y) = x^3 - y^2$. ראינו את העקומה הזו עם ההצגה הפרמטרית $r(t) = (t^2, t^3)$, וכמו קודם, הנקודה $(0, 0)$ היא נקודה בעייתית - והגרדיאנט מתאפס בה.

3. $f(x, y) = x^2 + y^2$. קבוצת האפסים של f היא ראשית הצירים, ונקודה אחת היא כמובן לא דבר חד מימדי, כפי שהיינו מצפים.

תרגיל (לא פשוט) אם $A \subseteq \mathbb{R}^2$ סגורה אזי קיימת פונקציה חלקה שקבוצת האפסים שלה היא בדיוק A .

טענה 1.1 תהי $U \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ חלקה, $q_0 = (x_0, y_0) \in U$, אזי קיימת סביבה V של q_0 בתוך $\mathbb{R}^2$, שחלקית לקבוצה U , כך שהקבוצה $\{(x, y) \in V \mid f(x, y) = 0\}$ היא גרף של פונקציה חלקה.

הוכחה: נתון כי $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. נובע כי אחת הנגזרות החלקיות לא מתאפסת, ומכאן הטענה נובעת ממשפט הפונקציה הסתומה. ■

1.2 במימד כללי

1. מפרמטריזציה $r : G \rightarrow \mathbb{R}^n$, כאשר $g \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה, נדרוש כי לכל $x \in G$ העתקה הדיפרנציאל $D_x r = Dr(x)$ היא בעלת דרגה מקסימלית, $\text{rk } D_x r = k$. באופן שקול, $D_x r : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ חד־חד־ערכית. בנוסף נדרוש כי $r : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ הומיאומורפיזם.

2. מהצגה סתומה, שהיא מערכת משוואות $f_1 = 0, \dots, f_{n-k} = 0$ על $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, נדרוש כי לכל $x \in M = \{x \mid f_i(x) = 0\}$, הגרדיאנטים $\nabla f_i(x)$ בלתי תלויים לינארית.

נוכל להגדיר העתקה

$$F : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_{n-k}(x))$$

אזי

$$M = F^{-1}(0_{n-k})$$

ואז התנאי הקודם, על אי תלות לינארית, שקול לדרגה מקסימלית $(n-k)$ של $D_x F$ לכל $x \in M$ (רגולרית על M).

הגדרה 1.2 תהי $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, כאשר $U \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, ויהי $x \in U$. F נקראת רגולרית בנקודה x אם

$$\text{rk } D_x f = \min(n, m)$$

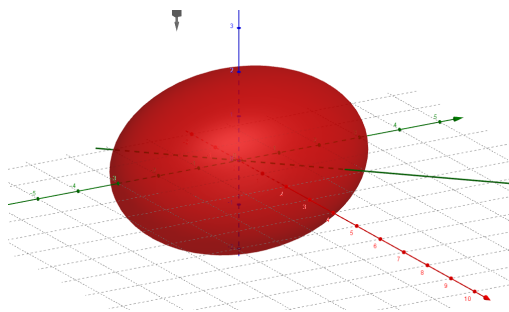
אחרת, נגיד כי x נקודה סינגולרית של F .

1.3 שניוניות

1.3.1 אליפסואיד

מתבוננים במשוואה מהצורה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



איור 1: אליפסואיד

כל הנקודות כאן הן רגולריות, וניתן לכתוב ייצוג פרמטרי, כביכול:

$$x = a \cos \varphi \cos \theta$$

$$y = b \sin \varphi \cos \theta$$

$$z = c \sin \theta$$

כאשר כאן $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$. זה לא ייצוג פרמטרי לחלוטין שכן הקבוצות שמהן הפרמטרים לקוחים לא פתוחות.

1.3.2 היפרבולואיד חד-יריעתי

מתבוננים במשוואה מהצורה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

כל הנקודות רגולריות. יש שוב ייצוג פרמטרי:

$$x = a \sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}} \cos \varphi$$

$$y = b \sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}} \sin \varphi$$

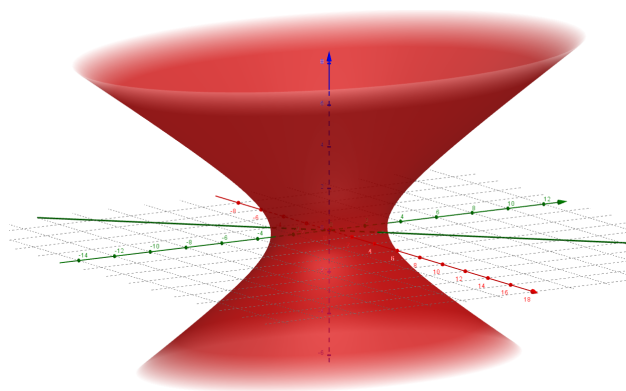
$$z = z$$

כאשר $-\infty < z < \infty$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

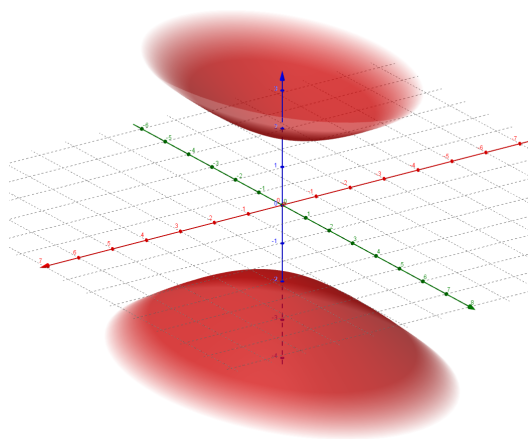
1.3.3 היפרבולואיד דו-יריעתי

מתבוננים במשוואה מהצורה

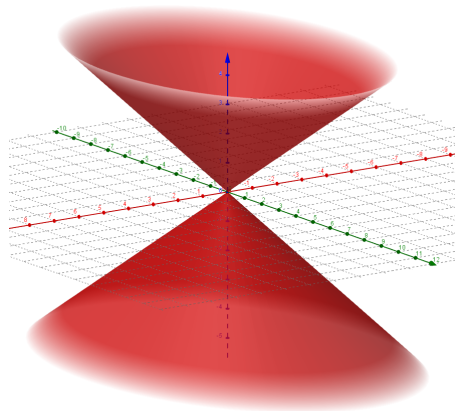
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



איור 2: היפרבולואיד חד-לעית



איור 3: היפרבולואיד דו-לעיתי



איור 4: קונוס

כל הנקודות הן רגולריות. זהו איחוד של שני גרפים,

$$z = \pm c \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

1.3.4 קונוס

מתבוננים במשוואה מהצורה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

יש נקודה סינגולרית אחת, $(0, 0, 0)$, וכל שאר הנקודות רגולריות.

1.3.5 צילינדר

מתבוננים במשוואה מהצורה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

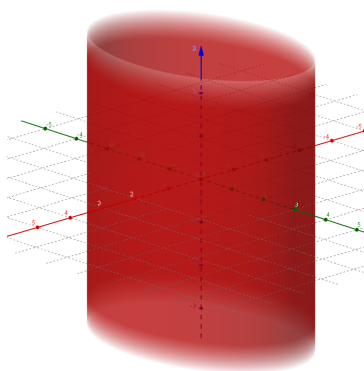
וכל הנקודות רגולריות. יש ייצוג פרמטרי:

$$x = a \cos \varphi$$

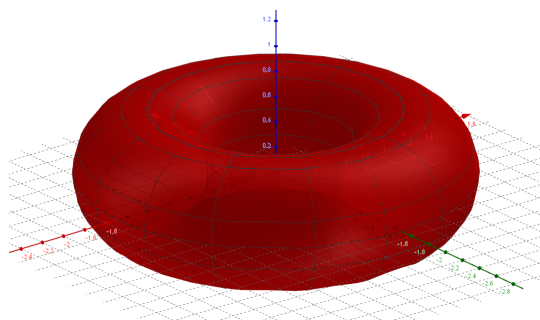
$$y = b \sin \varphi$$

$$z = z$$

כאשר $-\infty < z < \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.



איור 5: צילינדר



איור 6: טורוס

1.3.6 טורוס

אם יש לנו עקומה $\gamma(s) = (\gamma_1(s), 0, \gamma_3(s))$, אז מקבלים משטח סיבוב

$$\Gamma(s, t) = (\gamma_1(s) \cos t, \gamma_1(s) \sin t, \gamma_3(s))$$

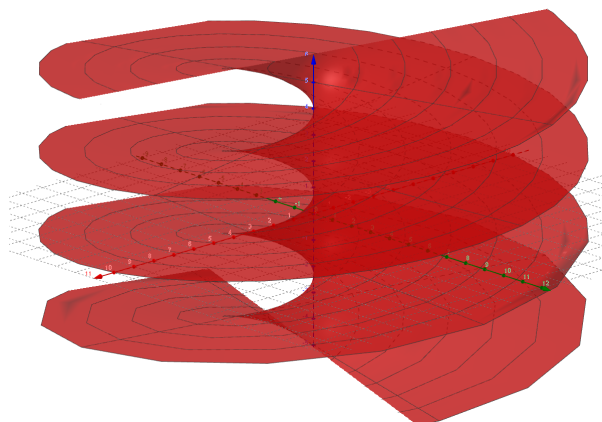
למשל, אם ניקח $\gamma(s) = (a + b \cos s, 0, b \sin s)$, נקבל טורוס:

$$\Gamma(s, t) = ((a + b \cos s) \cos t, (a + b \cos s) \sin t, b \sin s)$$

1.3.7 ספירלה

זוהי העתקה מהצורה

$$t \rightarrow (\cos t, \sin t, t)$$



איור 7: הליקואיד

אפשר להעביר דרכה "מדרגות חלקות", כלומר קווים ישרים בצורה מסויימת, ולקבל
הליקואיד:

$$(s, t) \rightarrow (s \cos t, s \sin t, t)$$

עם $s > 0, t \in \mathbb{R}$.