חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

5 ביוני 2017

1 תבניות דיפרנציאליות

1.1 אחד־תבניות דיפרנציאליות

אם f פונקציה חלקה C^1 במרחב $\mathbb{R}^n$, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, אז לכל $x\in\mathbb{R}^n$ אפשר להסתכל על הדיפרנציאל $\mathrm{d}f\left(x\right)=\mathrm{d}_xf$ בתור העתקה

$$\mathrm{d}_xf:T_x\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

לכל $v\in T_x\mathbb{R}^n$ אפשר לבחור עקומה $\gamma:\left(-\varepsilon,\varepsilon\right)\to\mathbb{R}^n$ עם $\gamma\left(0\right)=x$, $\gamma'\left(0\right)=v$, ואז

$$\mathrm{d}_xf\left(v\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mid_{t=0}f\left(\gamma\left(t\right)\right)$$

הגדרה 1.1 אוסף כל הפונקציונאלים הלינאריים על המרחב המשיק $T_x\mathbb{R}^n$ נקרא <u>המרחב הקו־משיק</u>, ומסומן $T_x^*\mathbb{R}^n$

תזכורת אם V מרחב ווקטורי מעל $\mathbb{R}$, אפשר להגדיר את המרחב הדואלי שלו, V^*, להיו תאוסף הפונקציונאלים הלינאריים $f:V\to\mathbb{R}$. לכן

$$T_x^*\mathbb{R}^n=\left(T_x\mathbb{R}^n\right)^*$$

נסתכל על הפונקציות

$$\begin{aligned}x_i&:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\\ x_i\left(t_1,\dots,t_n\right)&=t_i\\ \mathrm{d}x_i&:T_x\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\\ \mathrm{d}x_i\left(\xi_1,\dots,\xi_n\right)&=\xi_i\end{aligned}$$

ואז למעשה קיבלנו בסיס דואלי לבסיס הסטנדרטי:

$$\mathrm{d}x_1,\dots,\mathrm{d}x_n$$

דוגמא ניקח כעת

$$\begin{aligned} f\left(x_{1},\ldots,x_{n}\right) &= x_{i}^{2} \\ df_{x}\left(\xi\right) &= 2x_{i}\xi_{i} \end{aligned}$$

נעיר שאמורים לכתוב תמיד $\mathrm{d}_{x}x_{1}$ וכן הלאה, אבל אנחנו נכתוב $\mathrm{d}x_{1}$. הבסיס הסטנדרטי של $T_{x}\mathbb{R}^{n}\cong\mathbb{R}^{n}$ יהי $e_{1},\ldots,e_{n}$, ואז יש לנו את הבסיס הדואלי שלו:

$$\mathrm{d}x_{i}\left(e_{j}\right)=\delta_{i,j}$$

סימון מקובל אחר לבסיס הסטנדרטי של $T_{x}\mathbb{R}^{n}$ הוא $\frac{\partial}{\partial x_{i}}$, ואז הבסיס הסטנדרטי של המרחק הקו־משיק הוא

$$\mathrm{d}x_{i}\left(\frac{\partial}{\partial x_{j}}\right)=\delta_{i,j}$$

כעת, אם $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ פונקציה חלקה, אזי

$$\mathrm{d}_{x}f\left(\xi\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_{j}}\left(x\right)\xi_{j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_{j}}\left(x\right)\mathrm{d}x_{j}\left(\xi\right)$$

לכן נקבל

$$\mathrm{d}_{x}f=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_{j}}\left(x\right)\mathrm{d}x_{j}\in T_{x}^{*}\mathbb{R}^{n}$$

ובאופן כללי

$$\mathrm{d}f=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_{j}}\mathrm{d}x_{j}$$

הגדרה 1.2 תבנית דיפרנציאלית לינארית (אחד־תבנית דפירציאלית, שדה קו־ווקטורי) המוגדרת על קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{R}^{n}$ היא התאמה

$$U\ni x\mapsto\omega_{x}\in T_{x}^{*}\mathbb{R}^{n}$$

כאשר

$$\omega_{x}\left(\xi\right)=\omega_{x}\left(\sum\xi_{j}e_{j}\right)=\sum_{j=1}^{n}\omega_{x}\left(e_{j}\right)\xi_{j}$$

נסמן $a_{j}\left(x\right)=\omega_{x}\left(e_{j}\right)$ ואז

$$\omega_{x}=\sum_{j=1}^{n}a_{j}\left(x\right)\mathrm{d}x_{j}$$

בדרך כלל נניח שהמקדמים $a_i\left(x\right)$ חלקים C^1. במקרה זה, האחד־תבנית הדיפרנציאלית ω תיקרא חלקה C^1. אם ω היא נגזרת של פונקציה f, נסמן $\omega = \mathrm{d}f$. במקרה $n=1$, אם ניקח

$$\mathrm{d}x \in T_x^*\mathbb{R}$$

ולוקחים תבנית

$$\omega = a\left(x\right)\mathrm{d}x$$

כעת אם יש f עבורה $\omega = \mathrm{d}f$ נקבל $\mathrm{d}f = f'\left(x\right)\mathrm{d}x$, ולכן נחפש f עם $f'\left(x\right) = a\left(x\right)$. יש כזו, כי a רציפה. במקרה $n=2$, החיים יותר מסובכים ־ לוקחים

$$\omega = a\left(x,y\right)\mathrm{d}x + b\left(x,y\right)\mathrm{d}y$$

אנחנו רוצים למצוא f עבורה

$$\omega = \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

וזה לא תמיד אפשרי. תנאי הכרחי הוא:

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial y}$$

תנאי זה מספיק על תחום, אבל לא על קבוצה פתוחה כללית.

1.2 אינטגרציה על אחד־תבניות דיפרנציאליות

ניקח ω אחד־תבנית דיפרנציאלית על $\mathbb{R}^n$. ניקח $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, וניקח חלוקה $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$. נגדיר

$$v_k = \gamma\left(t_{k+1}\right) - \gamma\left(t_k\right)$$

ואז נרצה להסתכל על הגודל

$$\sum \omega_{\gamma(t_i)}\left(v_i\right) = \sum \omega_{\gamma(t_i)}\left(\gamma\left(t_{i+1}\right) - \gamma\left(t_i\right)\right)$$

הגדרה 1.3 אינטגרל של אחד־תבנית דיפרנציאלית ω על עקומה γ הוא

$$\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_a^b \omega_{\gamma(t)}\left(\gamma\left(t\right)\right)\mathrm{d}t$$

כעת, אם

$$\omega_x = \sum a_j\left(x\right)\mathrm{d}x_j$$

אזי

$$\int\limits_{\gamma}\omega = \int\limits_{a}^{b}\sum_{i=1}^{n}a_i\left(\gamma\left(t\right)\right)\gamma_i'\left(t\right)\mathrm{d}t = \int\limits_{\gamma}\sum_{i=1}^{n}a_i\left(x\right)\mathrm{d}x_i$$

דוגמאות

1. בתוך $\mathbb{R}^3$ ניקח

$$\omega = z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z$$

ואת המסילה $\gamma\left(t\right) = \left(\cos t, \sin t, t\right)$, שמקיימת

$$\gamma'\left(t\right) = \left(-\sin t, \cos t, 1\right)$$

כאשר $\gamma : \left[0, 2\pi\right] \to \mathbb{R}$. אז

$$\omega_{\gamma(t)}\left(\gamma'\left(t\right)\right) = -t\sin t + \cos^2 t + \sin t$$

ולכן אחרי חישובים נקבל

$$\int\limits_{\gamma}\omega = \int\limits_{0}^{2\pi} -t\sin t + \cos^2 t + \sin t\,\mathrm{d}t = 3\pi$$

2. בתחום $\mathbb{R}^2\setminus\left\{0\right\}$ ניקח

$$\omega = \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$$

ואת המסילה $\gamma\left(t\right) = \left(\cos t, \sin t\right)$ כלומר $\gamma'\left(t\right) = \left(-\sin t, \cos t\right)$. אז

$$\omega_{\gamma(t)}\left(\gamma'\left(t\right)\right) = \frac{\sin^2 t + \cos^2}{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

לכן

$$\int\limits_{\gamma}\omega = \int\limits_{0}^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi$$

נוכל להיווכח בקלות כי $\frac{\partial a}{\partial y}=\frac{\partial b}{\partial x}$. כעת, אם נסמן $\theta\left(x,y\right)$ את הארגומנט של נקודה במישור, נקבל

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\\ \frac{\partial\theta}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2}\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}=-\frac{y}{x^2+y^2}=b\\ \frac{\partial\theta}{\partial y} &= \frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{x}{x^2+y^2}=a\end{aligned}$$

ולכן למעשה מצאנו קדומה - אבל היא לא מוגדרת על כל התחום $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ באופן חלק. צריך להוציא קרן (למשל את החלק השלילי של ציר x) ואז אפשר. אפשר לראות שאי אפשר להגדיר על כל המישור המנוקב כי אחרת היינו מקבלים

$$2\pi=\int\limits_{\gamma}\omega=\int\limits_{\gamma}\mathrm{d}f=\int\limits_{0}^{2\pi}\mathrm{d}_{\gamma(t)}f\left(\gamma'\left(t\right)\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f\left(\gamma\left(t\right)\right)\mathrm{d}t=f\left(\gamma\left(2\pi\right)\right)-f\left(\gamma\left(0\right)\right)=0$$