חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

24 במאי 2017

1 משפט הדיברגץ

1.1 המקרה של שפה "חלקה למקוטעין"

נסתכל על תחום חסום $G \subseteq \mathbb{R}^n$, ככה שמתקיים $\Gamma = \partial G = \Gamma_0 \cup K$, כאשר האיחוד הוא זר, וכן:

1. Γ_0 היא יריעה חלקה ממימד $n-1$ בעלת נפח $(n-1)$ מימדי סופי, ושעבור Γ_0 התכונה עבור G של להיות קבוצה פתוחה חלקה מתקיימת.
2. K קבוצה קומפקטית, כך שלכל ε מתקיים $v_n\left(K_{+\varepsilon}\right) = o\left(\varepsilon\right)$, כאשר
$$K_{+\varepsilon} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid d\left(x, K\right) < \varepsilon\right\}$$
קבוצה K שכזו נקראת קומפקט $(n-1)$ זנית.

דוגמא

1. ניקח K להיות דיסק דו מימדי בתוך $\mathbb{R}^3$. אזי
$$v_3\left(K_{+\varepsilon}\right) = 2\varepsilon S\left(K\right) + o\left(\varepsilon\right)$$
וכאן התנאי לא מתקיים.
2. אם ניקח K שהיא קטע בתוך $\mathbb{R}^3$, אז
$$v_3\left(K_{+\varepsilon}\right) = l\left(K\right)\pi\varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right)$$

ההגדרה הזו כבר מאפשרת לנו לקחת כל מיני דוגמאות - קוביה, חרוט (K תהיה המעגל בבסיס והנקודה בקצה), או גליל (K תהיה המעגלים) למשל.

משפט 1.1 (משפט הדיברגנץ לשפה לא חלקה) יהי $G \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום חסום כמו שתיארנו קודם. יהי F שדה ווקטורי חלק על $\overline{G}$. אזי
$$\int\limits_G \mathrm{div}F = \int\limits_{\Gamma_0} \left\langle F, N\right\rangle \,\mathrm{d}S$$

הוכחה: מקרה ראשון - F מתאפסת בסביבת K. במקרה זה, ההוכחה מאוד דומה להוכחה שראינו של משפט הדיברגנץ, רק שכאן לכל $x \in \overline{G} \cap \mathrm{supp}\,(F)$ ניקח כדור B_x כמו קודם. אז נוכל לקחת פירוק יחידה עבור תת כיסוי סופי ולעבור לטענה מקומית. אותה אפשר להוכיח באותו אופן בדיוק שהראינו.

במקרה השני, F היא שדה וקטורי כללי. בהנתן $\varepsilon > 0$ נבנה פונקציה $\psi = \psi_\varepsilon : C^1$ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ המקיימת:

1. $0 \le \psi \le 1$ בכל $\mathbb{R}^n$, $\psi \equiv 1$ בסביבת ε של K.
2. $\psi \equiv 0$ במשלים של סביבת 3ε של K.
3. מתקיים

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi| = o\,(1)$$

כאשר $\varepsilon \to 0$.

התנאי השלישי הופך את כל העסק ללא טריוויאלי - במימד אחד, למשל, כאשר K היא נקודה, לא נצליח לבצע זאת. זה בסדר כי במקרה החד מימדי כל תחום הוא קטע, ולכן אין הבדל בין תחום חלק לתחום לא חלק. לכן נעבוד במקרה $n \ge 2$. את קיום הפונקציה נניח כרגע, ונוכיח אחרי המשפט.

יהי F שדה וקטורי חלק על $\overline{G}$. נסתכל על השדה הווקטורי $(1-\psi)\,F$. השדה הווקטורי הזה חלק ומתאפס בסביבת ε של K, ולכן משפט הדיברגנץ חל עליו (מהמקרה הראשון). לכן

$$\int\limits_G \mathrm{div}\,((1-\psi)\,F)\;\mathrm{d}x = \int\limits_{\Gamma_0} \langle (1-\psi)\,F, N\rangle\;\mathrm{d}S$$

נבדוק שאם נשאיף $\varepsilon \to 0$ נקבל בגבול את משפט הדיברגנץ עבור F.

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,((1-\psi)\,F) - \mathrm{div}\,(F) &= -\mathrm{div}\,(\psi F) = \\ &= -\langle \nabla\psi, F\rangle - \psi \mathrm{div} F\end{aligned}$$

נראה ששני האינטגרלים זניחים:

$$\left|\int\limits_G \langle \nabla\psi, F\rangle\;\mathrm{d}x\right| \le \int\limits_G |\nabla\psi|\,|F|\;\mathrm{d}x \le \left(\max_{\overline{G}} |F|\right)\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla\psi|\;\mathrm{d}x = o\,(1)$$

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_G \psi \mathrm{div} F\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int\limits_{G\cap K_{+3\varepsilon}} \psi \mathrm{div} F\right| \le \int\limits_{G\cap K_{+3\varepsilon}} |\psi|\,|\mathrm{div} F|\;\mathrm{d}x \le \\ &\le \int\limits_{G\cap K_{+3\varepsilon}} |\mathrm{div} F|\;\mathrm{d}x \le \left(\max_{\overline{G}} |\mathrm{div} F|\right) v_n\,(K_{+3\varepsilon}) = o\,(\varepsilon) = o\,(1)\end{aligned}$$

כאשר $\varepsilon \to 0$, קיבלנו כי אגף שמאל של מה שיש לנו שואף לאגף שמאל של מה שרצינו. נעבור לאגפי ימין.

$$\int\limits_{\Gamma_0} \langle F, N \rangle \, \mathrm{d}S - \int\limits_{\Gamma_0} \langle (1-\psi) F, N \rangle \, \mathrm{d}S = \int\limits_{\Gamma_0} \psi \langle F, N \rangle \, \mathrm{d}S$$

נרצה להראות שזה שואף לאפס. נשים לב שמתקיים

$$|\psi \langle F, N \rangle| \le |\langle F, N \rangle| \le |F| \le \max_{\overline{G}} |F| = C$$

בנוסף, ψ מתאפסת במשלים של $K_{+3\varepsilon}$, ולכן האינטגרל שלנו הוא על פונקציה שהיא אפס כמעט בכל Γ_0, וחסומה ־ ולכן הוא הולך לאפסת וסיימנוץ בשיעור הבא נטען את זה באופן מסודר יותר. ■