חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

ⓒ ארזים

13 במרץ 2017

1 יריעות במרחב $\mathbb{R}^n$

יריעה היא "קבוצה חלקה" במרחב $\mathbb{R}^n$. נתחיל דווקא בדוגמאות.

1. במישור $\mathbb{R}^2$, יריעה יכולה להיות עקומה - מימד 1.
2. במרחב $\mathbb{R}^3$, יריעה יכולה להיות עקומה - מימד 1 - או משטח חלק - מימד 2.
3. דוגמא בסיסית של יריעה: גרף של העתקה. תהי $G \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה, ותהי $f : G \to \mathbb{R}^k$ חלקה לפחות C^1 (נניח כי $0 < k < n$). הגרף של f הוא

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in G\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

דוגמה זו נותנת את דוגמא 1 אם מציבים $k = 1$, $n = 2$. בדוגמא 2, המשטח מתקבל על ידי $k = 2$, $n = 3$:

$$\Gamma = \{(s, t, f(s, t)) \mid (s, t) \in G\}$$

העקומה מתקבלת על ידי $k = 1$, $n = 3$:

$$\Gamma = \{(t, f(t), g(t)) \mid t \in I\}$$

כאשר $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע פתוח, $f, g : I \to \mathbb{R}$. נגדיר $\phi(t) = (f(t), g(t))$, ואז $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ומתקיים $\Gamma = \Gamma(\phi)$.

ניתן מושג כללי למושג של גרף: איזשהן $n - k$ קואורדינטות מתוך $x_1, \ldots, x_n$ במרחב $\mathbb{R}^n$ הן פונקציות של כל שאר הקואורדינטות.

דוגמא

$$\Gamma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in G, y = f(x, z)\right\}$$

זהו גרף גם כן.

דוגמא לא כל יריעה היא גרף ־ ספירת היחידה S^2, למשל, היא יריעה חלקה אבל לא גרף. מקומית ־ זה כן גרף! אם $q_0=(x_0,y_0,z_0)\in S^2$, אזי קיימת סביבה U של q_0 בתוך $\mathbb{R}^3$ כך שהקבוצה $U\cap S^2$ היא גרף.
למשל, אם $z_0\neq 0$ (ברור כי אחת הקואורדינטות אינה 0, שכן $|q_0|=1$, ובלי הגבלת הכלליות זו האחרונה), אזי q_0 נמצאת בחצי העליון של המרחב או בחצי התחתון ־ ואז החצי המתאים הוא סביבה שעונה על מה שרצינו. בסך הכלת אם אחת הקואורדינטות של q_0 אינה 0, אזי בסביבת q_0, הקואורדינטה הזו היא פונקציה של שתי האחרות על הספירה.

1.1 הצגה פרמטרית

תהי $M\subseteq\mathbb{R}^n$, ונניח כי $M=r(G)$, כאשר $G\subseteq\mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה, $r:G\to\mathbb{R}^n$.

דוגמאות

1. (א) עקומה במישור: $r:I\to\mathbb{R}$, כאשר $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע פתוח, $M=r(I)$.
   (ב) עקומה במרחב: כמו קודם, אבל $r:I\to\mathbb{R}^3$.
2. משטח במרחב: $r:G\to\mathbb{R}^3$, $G\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום (או קבוצה פתוחה), $M=r(G)$.
3. (א) $r(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta)$ ־ מעגל בתוך $\mathbb{R}^2$.
   (ב) $r(\theta,\varphi)=(\cos\varphi\sin\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\theta)$.
4. גרף ־ מקרה פרטי של הצגה פרמטרית:

$$\Gamma=\{(s,t,f(s,t))\mid(s,t)\in G\}$$
$$r(s,t)=(s,t,f(s,t))$$

1.2 הצגה סתומה

זהו תיאור של יריעה בעזרת מערכת משוואות.

דוגמאות

1. עקומה במרחב $\mathbb{R}^2$: $M=\{(x,y)\in U\mid f(x,y)=0\}$, כאשר $f:U\to\mathbb{R}$.
2. ספירת היחידה במרחב $\mathbb{R}^2$: $S^1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2-1=0\right\}$.
3. משטח במרחב $\mathbb{R}^3$: $M=\{(x,y,z)\in U\mid f(x,y,z)=0\}$, כאשר $f:U\to\mathbb{R}$.
4. עקומה במרחב $\mathbb{R}^3$: $M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid f(x,y,z)=0,g(x,y,z)=0\right\}$ כאשר $f,g:U\to\mathbb{R}^2$.
5. גרף ־ מקרה פרטי של הצגה סתומה: $\Gamma=\{(s,t,f(s,t))\mid(s,t)\in G\}$, נגדיר $F(x,y,z)=f(x,y)-z$.
6. $\Gamma=\{(s,f(s),g(s))\}$, נגדיר $u(x,y,z)=y-f(x)$, $v(x,y,z)=z-g(x)$. אזי $\Gamma=\{(x,y,z)\mid u(x,y,z)=v(x,y,z)=0\}$.

1.3 בעיות

באופן כללי, יש לתת הגבלות על הצגה פרמטרית או הצגה סתומה. כדי להבין מדוע נדבר על המקרה של עקומות במישור $\mathbb{R}^2$.

1.3.1 הצגה פרמטרית

$r: I \to \mathbb{R}^2$, $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע פתוח. נרצה שחיתוך של היריעה שלנו עם כדור קטן תהיה "קבוצה פשוטה" ככל האפשר, ולכן נדרוש כי r היא חד־חד ערכית ־ אחרת נקבל קבוצות מורכבות.

הדרישה הזו לא מספיקה, שכן יכול להיות ששפת היריעה תחתך איתה ־ וזה יוביל לבעיות. לכן נדרוש כי r תהיה הומיאומורפיזם לתמונה שלה ־ כלומר העתקה רציפה שההופכית שלה רציפה.

1.4 תזכורת ־ טופולוגיה

הגדרה 1.1 יהיו $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה, $f: A \to \mathbb{R}^m$ העתקה, $a \in A$. אזי f נקראת רציפה בנקודה a אם

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \left(x \in A, d\left(x, a\right) < \delta\right) \Rightarrow d\left(f\left(x\right), f\left(a\right)\right) < \varepsilon$$

אם f רציפה בכל נקודה נאמר שהיא רציפה על A.

הגדרה 1.2 יהיו $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$. תהי $f: A \to B$ העתקה. f נקראת <u>הומיאומורפיזם</u> אם f חד־חד־ערכית ועל, רציפה, וכן $f^{-1}: B \to A$ רציפה.

תרגיל תהי $G \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה, ותהי $r: G \to \mathbb{R}^n$ העתקה חד־חד־ערכית ורציפה. אזי $r: G \to r\left(G\right)$ אינה הומיאומורפיזם אם ורק אם קיימת סדרה $\left(x_k\right)_{k=1}^{\infty}$ של נקודות מתוך G כך שהסדרה שואפת לשפה של G או לאינסוף, וכך שהגבול

$$b = \lim_{k \to \infty} r\left(x_k\right)$$

קיים ושייך לתמונה $r\left(G\right)$.

תרגיל נניח כי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, $f: U \to \mathbb{R}^2$ העתקה. אזי f רציפה אם ורק אם לכל קבוצה פתוחה $W \subseteq \mathbb{R}^m$, התמונה ההפוכה $f^{-1}\left(W\right)$ פתוחה בתוך $\mathbb{R}^n$.

דוגמא "סותרת": $f: S \to \mathbb{R}^2$, כאשר $S = \{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$, כאשר $f\left(t, 0\right) = \left(t, 0\right)$. תמונה הפוכה של כל קבוצה פתוחה היא תת קבוצה של הישר, ולכן לא פתוחה. התנאי על פתיחות המקור הכרחי.

הגדרה 1.3 תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה כלשהי. תת קבוצה $S \subseteq A$ נקראת <u>פתוחה יחסית</u> בתוך A אם קיימת קבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{R}^n$ כך שמתקיים $S = A \cap U$.

תרגיל יהיו $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ קבוצות, $f: A \to B$ העתקה. אזי f רציפה אם ורק אם לכל קבוצה $S \subseteq B$ פתוחה יחסית, התמונה ההפוכה $f^{-1}\left(S\right) \subseteq A$ היא פתוחה יחסית. תיאור שקול ־ לכל $W \subseteq \mathbb{R}^m$ פתוחה, $f^{-1}\left(W\right) \subseteq A$ פתוחה יחסית.

1.5 מרחב מטרי

הגדרה 1.4 תהי X קבוצה, ותהי $d : X \times X \to \mathbb{R}$ המקיימת:

1. $d\left(x,y\right) \geq 0$, וכן $d\left(x,y\right) = 0$ אם ורק אם $x = y$.
2. $d\left(x,y\right) = d\left(y,x\right)$.
3. $d\left(x,z\right) \leq d\left(x,y\right) + d\left(y,z\right)$.

הגדרה 1.5 כדור פתוח הוא

$$B\left(x,r\right) = \left\{ y \in X \mid d\left(x,y\right) < r \right\}$$

מכאן אפשר להגדיר קבוצה פתוחה כמו שאנחנו מכירים, וכן רציפות. במצב זה נקבל שהתנאי לרציפות לפי תמונה הפוכה של קבוצות פתוחות עדיין נכון.

בהנתן $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תת קבוצה, A היא מרחב מטרי: $d : A \times A \to \mathbb{R}$ המרחק האוקלידי. מה זו קבוצה פתוחה $S \subseteq A$? תת קבוצה S פתוחה במרחב מטרי A אם לכל $x \in S$ קיים $\varepsilon > 0$ כך שמתקיים $B\left(x,\varepsilon\right) \cap A \subseteq S$.

תרגיל הראו כי תכונה זו שקולה לכך שהקבוצה S פתוחה יחסית בתוך A.

1.6 חזרה לפרמטריזציה

יש לנו העתקה $r : I \to \mathbb{R}^2$, כאשר $I \subseteq \mathbb{R}$. ראינו שאנחנו צריכים לדרוש כי $r : I \to r\left(I\right)$ הומיאומורפיזם, וכן כי $r : I \to \mathbb{R}^2$ חלקה. אבל זה עדיין לא לגמרי מספיק:

דוגמא $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $r\left(t\right) = \left(t^2, t^3\right)$. נקבל עקומה שסימטרית סביב ציר x, עם שפיץ בנקודה $\left(0,0\right)$, והתמונה לא חלקה, למרות שההעתקה חלקה (חלקה בשתי הקואורדינטות). מתקיים $r'\left(0\right) = 0$.

אם $r : I \to \mathbb{R}^2$, עם $r'\left(t\right) \neq 0$ לכל $t \in I$, נקבל עקומה חלקה - אינטואיציה היא שכדי ליצור שפיץ, צריך שהמהירות תגיע לאפס, ואז נתחיל ללכת בכיוון השני. אם המהירות לא מתאפסת, אין שפיץ.

טענה 1.6 יהי $I = \left(a,b\right) \subseteq \mathbb{R}$ קטע פתוח, תהי $r : I \to \mathbb{R}^2$ מסילה חלקה, ותהי $t_0 \in \left(a,b\right)$ כך שמתקיים $r'\left(t_0\right) \neq 0$. אזי קיימת סביבה U של t_0 בתוך I כך שהתמונה $r\left(U\right)$ היא גרף של פונקציה חלקה.

הוכחה: נסמן $r\left(t\right) = \left(f\left(t\right), g\left(t\right)\right)$. נתון כי

$$r'\left(t_0\right) = \left(f'\left(t_0\right), g'\left(t_0\right)\right) \neq 0$$

אזי $f'\left(t_0\right) \neq 0$ (בלי הגבלת הכלליות). ממשפט הפונקציה ההפוכה, קיימת סביבה V של t_0 כך שההעתקה $f\mid_V : V \to f\left(V\right) = U$ היא דיפאומורפיזם (כלומר חלקה שגם ההופכית שלה חלקה). נגדיר

$$h = g \circ \left(f\mid_V\right)^{-1} : U \to \mathbb{R}$$

וכעת

$$r\left(V\right)=\left\{\left(x,h\left(x\right)\right)\mid x\in U\right\}$$

■