חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

ⓒ ארזים

22 במאי 2017

1 נוסחאות גרין ופונקציות הרמוניות

יהי $G \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום חסום, $u, v \in C^2(\mathbb{R})$. ניזכר כי

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)$$

אזי מתקיימות נוסחאות גרין. נשתמש היום רק בשלישית, ולכן נזכיר רק אותה:

$$\int_G u\Delta v - v\Delta u \, \mathrm{d}x = \int_{\partial G} u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial v}{\partial n} \, \mathrm{d}S$$

כאשר $\frac{\partial u}{\partial n} = \langle \nabla u, N \rangle$ - הנגזרת בכיוון הנומרל החיצוני. אמרנו כי u הרמונית אם $\Delta u = 0$, ואז ראינו תכונות של פונקציות הרמוניות:

1. עקרון הערך הממוצע.
2. עקרון המקסימום - אם פונקציה הרמונית על תחום חסום מקבלת מקסימום בשפה אז היא קבועה.
3. משפט ליוביל - אם פונקציה הרמונית על כל $\mathbb{R}^n$ חסומה מלעיל או מלרע אז היא קבועה.

תרגיל יהיו u_1, u_2 הרמוניות על $\mathbb{R}^n$. עבור $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ועבור $a > 0, b > 0$ נגדיר

$$L(a, b) = \int_{S^{n-1}} u_1(x_1 + ax) \, u_2(x_2 + bx) \, \mathrm{d}S(x)$$

הראו כי אם $ab = cd$ אזי $L(a, b) = L(c, d)$.

פתרון נגדיר

$$F(\lambda) = L\left(\lambda\rho, \lambda^{-1}\rho\right)$$

עבור $\rho = \sqrt{ab}$. כעת נרצה להראות כי F קבועה. נראה כי $F' = 0$. נגזור תחת סימן האינטגרל (הצדקה בסוף). נשים לב שהנורמל לספירה הוא $n = x$, ואז

$$\begin{aligned}
F(\lambda) &= \int\limits_{S^{n-1}} u_1(x_1 + \lambda\rho x)\, u_2\left(x_2 + \lambda^{-1}\rho x\right) \mathrm{d}S(x) \\
F'(\lambda) &= \int\limits_{S^{n-1}} \langle \nabla u_1(x + \lambda\rho x), \rho x\rangle\, u_2\left(x_2 + \lambda^{-1} p x\right) + \left\langle u_2, x_2 + \lambda^{-1}\rho x, \frac{-\rho}{\lambda^2} x\right\rangle u_1(x_1 + \lambda\rho x)\, \mathrm{d}S(x) = \\
&= \frac{1}{\lambda} \int\limits_{S^{n-1}} \langle \rho\lambda \nabla u_1(x_1 + \lambda\rho x), n\rangle\, u_2\left(x_2 + \lambda^{-1}\rho x\right) - \left\langle \frac{\rho}{\lambda} \nabla u_2\left(x_2 + \lambda^{-1}\rho x\right), n\right\rangle u_1(x_1 + \lambda\rho x)\, \mathrm{d}S(x) = \\
&= \frac{1}{\lambda} \int\limits_{S^{n-1}} \frac{\partial u_1(x_1 + \lambda\rho x)}{\partial n} u_2\left(x_2 + \lambda^{-1}\rho x\right) - \frac{\partial u_2\left(x_1 + \lambda^{-1}\rho x\right)}{\partial n} u_1(x_1 + \lambda\rho x)\, \mathrm{d}S = \\
&= \frac{1}{\lambda} \int\limits_{B_0(1)} u_2\left(x_2 + \lambda^{-1}\rho x\right) \cancel{\Delta u_1(x_1 + \lambda\rho x)} - u_1(x_1 + \lambda\rho x)\, \cancel{\Delta u_2\left(x_1 + \lambda^{-1}\rho x\right)} = \\
&= 0
\end{aligned}$$

הצדקת הגזירה תהיה התרגיל הבא הביתה:

תרגיל אם $F(\lambda, x) \in C^1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ נגדיר

$$g(\lambda) = \int\limits_{S^{n-1}} F(\lambda, x)\, \mathrm{d}S(x)$$

אזי g גזירה וכן

$$g'(\lambda) = \int\limits_{S^{n-1}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(f(\lambda x))\, \mathrm{d}S(x)$$

"המישור יותר נחמד - הוא שדה, כי הוא $\mathbb{C}$" - המתרגל

"מה עם $\mathbb{R}^4$?" - סטודנטית

"$\mathbb{R}^4$ זה משהו מוזר, זה לא קומוטטיבי, יש קווטרניונים, הם מפחידים אותי, אני לא רוצה לדבר עליהם" - המתרגל

תרגיל (אינטגרל פואסון) תהי $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $n > 2$ עם תומך קומפקטי. הראו כי

$$u(x) = c_n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta u(w)}{|x - w|^{n-2}}\, \mathrm{d}w$$

פתרון נקבע x, ונגדיר

$$v(w) = |x - w|^{2-n}$$

פונקציה זו הרמונית בכל $\mathbb{R}^n\backslash\{x\}$ (יהיה בשיעורי הבית). עבור $\varepsilon > 0$ קטן מאוד ועבור $R > 0$ גדול מאוד, נגדיר $G = B(x,R)\backslash B(x,\varepsilon)$. מתקיים

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \pm\frac{n-2}{|w-x|^{n-1}}$$

כאשר הכיוון הוא מינוס בשפה הגדול, ופלוס בגדולה. מנוסחת גרין השלישית (ניזכר כי v הרמונית ולכן $\Delta v = 0$) מקבלים, על ידי בחירת R גדול מספיק, שמתקיים,

$$-\int\limits_G v\Delta u = \underbrace{\frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}\int\limits_{|w-x|=\varepsilon} u(w)\,\mathrm{d}S}_{\to v_{n-1}u(x)(n-2)} - \underbrace{\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\int\limits_{|w-x|=\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S}_{\leq c\varepsilon\to 0}$$

נשים לב שבאגף שמאל כתוב את מה שרצינו, אז צריך רק להעביר את הקבועים לצד השני.