חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

3 באפריל 2017

1 מרחב משיק

הגדרה 1.1 תהי $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k מימדית, ויהי $x\in M$. המרחב המשיק $T_{x}M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ הוא אוסף כל אותם $v\in\mathbb{R}^{n}$ כך שקיימת מסילה $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ עם $\gamma(0)=x$, $\gamma'(0)=v$.

יש גם את $x+T_{x}M$ - המרחב האפיני המשיק, שזה המרחב הלינארי המשיק מוזז בוקטור x.

1.1 תיאורים של המרחב המשיק

1. פרמטריזציה: נניח כי $M=r(G)\subseteq\mathbb{R}^{n}$, כאשר $G\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה, כאשר $r:G\to M$ פרמטריזציה טובה (אין בעיה בהנחה הזו, כי אחרת נצטמצם לסביבה קטנה מספיק). נסמן

$$u=(u_{1},\ldots,u_{k})\in\mathbb{R}^{k}$$
$$x=(x_{1},\ldots,x_{n})\in\mathbb{R}^{n}$$

יהי $\tilde{x}=r(\tilde{u})\in M$. נרצה למצוא ביטוי עבור $T_{\tilde{x}}M$. תהי $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to G$ עם $\gamma(0)=\tilde{u}$. נגדיר

$$\alpha(t)=r(\gamma(t))$$

מסילה בתוך M שעוברת בזמן 0 בנקודה $\tilde{x}$. לפי כלל השרשרת:

$$\alpha'(0)=r_{u_{1}}(\tilde{u})\gamma_{1}'(0)+\cdots+r_{u_{k}}(\tilde{u})\gamma_{k}'(0)=Dr(\tilde{u})r'(0)$$

כעת, הנגזרות החלקיות של r בנקודה $\tilde{u}$ בלתי תלויות לינארית, כי הפרמטריזציה רגולרית. אם כן,

$$T_{\tilde{x}}M=\operatorname{span}(r_{u_{i}}(\tilde{u}))$$

דוגמא ניקח גליל:

$$M=\left\{x_1^2+x_2^2=1,x_3\in[-1,1]\right\}$$

יש פרמטריזציה דו מימדית טובה מקומית:

$$r(\theta,t)=(\cos\theta,\sin\theta,t)$$

אם $x\in M$, נסמן $x=(x_1,x_2,x_3)$, וכן $x=r(\theta,t)$. אזי

$$T_xM=\operatorname{span}\left\{r_\theta(\theta,t),r_t(\theta,t)\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-x_2\\ x_1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

2. הצגה סתומה: נדון במקרה בו $M\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ממימד $n-1$, כי זה המקרה הנפוץ וקל להכליל. נניח כי $M=\{x\mid F(x)=0\}$, כאשר $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. יהי $\tilde{x}\in M$ אשר F רגולרית בו. תהי $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ מסילה שעוברת דרך $\tilde{x}$ בזמן $t=0$. מההגדרה, לכל $-\varepsilon<t<\varepsilon$, מתקיים

$$F(\alpha(t))=0$$

נגזור:

$$\begin{aligned}F_{x_1}(\tilde{x})\alpha_1'(0)+\cdots+F_{x_n}(\tilde{x})\alpha_n'(0)&=0\\ \nabla F(\tilde{x})\alpha'(0)&=0\end{aligned}$$

קיבלנו כי $T_{\tilde{x}}M=\nabla F(\tilde{x})^\perp$. המרחב האפיני המשיק הוא קבוצת אותם x המקיימים

$$(x-x_0)\nabla F(\tilde{x})=0$$

במקרה k מימדי כללי, יש $n-k$ העתקות שמהוות הצגה סתומה טובה, ואז המרחב המשיק הוא המרחב הניצב לכל הגרדיאנטים שלהן בנקודה $\tilde{x}$.

תרגיל נסמן $S^2=\left\{x^2+y^2+z^2=1\right\}$, ספירה בתוך $\mathbb{R}^3$. חשבו את המרחק $\rho(x_0,y_0,z_0)$ מהראשית למישור האפיני המשיק לספירה בנקודה (x_0,y_0,z_0).

פתרון $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=1$, ואז $S^2=\{F=0\}$. הגרדיאנט הוא

$$\nabla F(x_0,y_0,z_0)=2(x_0,y_0,z_0)$$

אז המרחב האפיני המשיק הוא אותן נקודות (x,y,z) שמקיימות

$$\begin{aligned}(x-x_0,y-y_0,z-z_0)(x_0,y_0,z_0)&=0\\ xx_0+yy_0+zz_0&=1\\ \rho(x_0,y_0,z_0)&=1\end{aligned}$$