חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

27 במרץ 2017

1 יריעות

הגדרה 1.1 יהיו $0 < k < n$ טבעיים. תהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ תיקרא יריעה k מימדית אם מתקיים אחד מבין ארבעת התנאים הבאים:

1. לכל $x \in M$ קיימת סביבה O של x בתוך $\mathbb{R}^n$ כך שהחיתוך $M \cap U$ זה גרף של פונקציה $f : V \to \mathbb{R}^{n-k}$, $V \subseteq \mathbb{R}^k$.
2. לכל $x \in M$ קיימת סביבה $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ודיפאומורפיזם $\varphi : U \to \varphi(U)$ כך שמתקיים
$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}$$
3. M היא מקומית בעלת פרמטריזציה טובה.
4. M היא מקומית בעלת הצגה סתומה טובה.

תרגיל הראו כי הגליל

$$M = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2=1, -1<z<1\right\}$$

הוא יריעה דו מימדית.

פתרון נתבונן בפרמטריזציה:

$$r(\theta,t) = (\cos\theta, \sin\theta, t)$$

כאשר $-1 < t < 1$, $0 \le \theta < 2\pi$. זו לא פרמטריזציה טובה - המקור שלה לא פתוח. הדרך לטפל בבעיה היא להגדיר שתי פרמטריזציות:

$$r_1(\theta,t) = r_2(\theta,t) = (\cos\theta, \sin\theta, t)$$

כאשר $-1 < t < 1$ לשתיהן, אבל עבור r_1, $0 < \theta < 2\pi$, ועבור r_2, $-\pi < \theta < \pi$. שתי אלה פרמטריזציות טובות. ולכל נקודה $(x,y,z) \in M$, אם $x \neq 1$ אזי r_1 פרמטריזציה טובה בסביבת הנקודה, ואם $x \neq -1$ אזי r_2 פרמטריזציה טובה.

נתבונן בספירה:

$$S^{n-1}=\left\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2=1\right\}$$

יריעה זו היא $n-1$ מימדית. קל להראות זאת באמצעות הצגה סתומה.

תרגיל לכל $x\in S^{n-1}$, מצאו פרמטריזציה טובה מקומית (הטלה סטריאוגרפית).

פתרון ראשית נדון במקרה הדו מימדי. נבצע את ההטלה בצורה גיאומטרית ־ בהינתן נקודה על הספירה, נחבר אותה בישר לקוטב הצפוני $(0,1)$, ונעתיק אותה לנקודת החיתוך של הישר הזה עם ציר x. אפשר לחשב ולמצוא כי

$$\varphi_N(x,y)=\frac{x}{1-y}$$

וזו העתקה חד־חד־ערכית ועל מהספירה (בלי הקוטב הצפוני) אל $\mathbb{R}$. ההופכית שלה היא

$$\varphi_N^{-1}(t)=\left(\frac{2t}{t^2+1},\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$$

באותו אופן נגדיר φ_S על ידי חיבור עם הקוטב הדרומי $(0,-1)$, ואז

$$\varphi_S(x,y)=\frac{x}{1+y}$$

וההופכית היא

$$\varphi_S^{-1}(t)=\left(\frac{2t}{t^2+1},\frac{1-t^2}{t^2+1}\right)$$

ביחד שתי אלה נותנות פרמטריזציה טובה לכל נקודה.
באופן כללי, יש לנו $S^{n-1}\subseteq\mathbb{R}^n$. כעת הקוטב הצפוני $N=(0,\ldots,0,1)$, $S=-N$.
ההטלות הן

$$\varphi_N\left((x_i)_{i=1}^n\right)=\left(\frac{x_i}{1-x_n}\right)_{i=1}^{n-1}$$

זו העתקה חד־חד־ערכית ועל, כמו קודם, וההופכית היא

$$\varphi_N^{-1}\left(\underbrace{(y_i)_{i=1}^{n-1}}_{y}\right)=\left(\frac{2y_1}{|y|^2+1},\ldots,\frac{2y_{n-1}}{|y|^2+1},\frac{|y|^2-1}{|y|^2+1}\right)$$

באופן אנלוגי נקבל את φ_S.