חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

ⓒ ארזים

26 ביוני 2017

1 שאלות ממבחנים

שאלה (מועד א' סמסטר ב' 2016) יהיו $v,w\in\mathbb{R}^3$ שני ווקטורים אורתונורמליים. חשבו את

$$I=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left\langle x,v\right\rangle^{20}\left\langle x,w\right\rangle^{16}e^{-|x|}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$$

פתרון יהי u ווקטור שמשלים את v,w לבסיס אורתונורמלי. עבור $y\in\mathbb{R}^3$ נכתוב

$$y=(y_1,y_2,y_3)=y_1u+y_2v+y_3w$$

כעת נבצע החלפת משתנה אורתוגונלית ונקבל

$$I=\int\limits_{\mathbb{R}^3}y_2^{20}y_3^{16}e^{-|y|}\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3$$

מנוסחת קו שטח על ספירות:

$$I=\lim_{r\to\infty}\int\limits_0^r\rho^2\int\limits_{S^2}\rho^{20}y_2^{20}\rho^{16}y_3^{16}e^{-\rho}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}=\underbrace{\int\limits_0^\infty\rho^{38}e^{-\rho}\,\mathrm{d}\rho}_{\Gamma(39)}\cdot\underbrace{\int\limits_{S^2}y_2^{20}y_3^{16}\,\mathrm{d}S}_{I_2}$$

נגדיר כעת $f\left(y\right)=y_2^{20}y_3^{16}e^{|y|^2}$, ואז

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}f\left(y\right)\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3=\left(\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-y_1^2}\,\mathrm{d}y_1\right)\left(\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-y_2^2}y_2^{20}\,\mathrm{d}y_2\right)\left(\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-y_3^2}y_3^{16}\,\mathrm{d}y_3\right)=$$
$$=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{21}{2}\right)\Gamma\left(\frac{17}{2}\right)$$

מצד שני,

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^3} f\left(y\right)\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3 &= \int\limits_0^\infty \rho^2 \int\limits_{S^2} f\left(\rho y\right)\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}\rho = \\
&= \int\limits_0^\infty \rho^{38} e^{-\rho^2} \int\limits_{S^2} y_2^{20} y_3^{16}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}\rho = \\
&= \Gamma\left(\frac{39}{2}\right) I_2
\end{aligned}
$$

בסך הכל:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{17}{2}\right)\Gamma\left(\frac{21}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{39}{2}\right)} \\
I &= \Gamma\left(39\right) I_2
\end{aligned}
$$

תרגיל תהיינה $f_i : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, עם $1 \le i \le n$, הומוגניות מדרגה $p \neq -1$:

$$f_i\left(tx\right) = t^p f_i\left(x\right)$$

לכל $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ולכל $t > 0$. נגדיר תבנית

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i \mathrm{d}x_i$$

ונניח שהיא סגורה. הראו כי

$$F\left(x\right) = \frac{1}{p+1} \sum_{i=1}^n x_i f_i\left(x\right)$$

היא קדומה של ω בכל $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

פתרון נשתמש בנוסחת אויילר (קל להוכיח, קשה לזכור): אם g הומוגנית מדרגה p, אזי

$$\left\langle \nabla g\left(x\right), x \right\rangle = p g\left(x\right)$$

נוכיח ברגע: נזכור כי $g\left(tx\right) = t^p g\left(x\right)$. נגזור לפי t:

$$\left\langle \nabla g\left(tx\right), x \right\rangle = p t^{p-1} g\left(x\right)$$

ונציב $t = 1$. נחזור לשאלה: נרצה להראות

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = f_j$$

נחשב:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_j} &= \frac{1}{p+1}\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_{i,j}f_i\left(x\right)+x_i\frac{\partial f_i\left(x\right)}{\partial x_j}\right)= \\ &= \frac{1}{p+1}\left(f_j\left(x\right)+\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f_j\left(x\right)}{\partial x_i}\right)= \\ &= \frac{1}{p+1}\left(f_j\left(x\right)+\left\langle\nabla f_j\left(x\right),x\right\rangle\right)= \\ &= \frac{1}{p+1}\left(f_j\left(x\right)+pf_j\left(x\right)\right)=f_j\left(x\right)\end{aligned}$$

תרגיל (2011, בחינה של שירי ארטשטיין) חשבו את

$$\int\limits_{\gamma} xe^x \mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y$$

כאשר γ מסילת רבע מעגל מהנקודה $(1,0)$ אל הנקודה $(0,1)$.

פתרון נסמן γ_2 ישר מהראשית אל $(1,0)$, וכן γ_1 ישר מהנקודה $(0,1)$ אל הראשית. נגדיר $\Gamma=\gamma_1+\gamma_2+\gamma$ (יש שמסמנים את זה איחוד). זו מסילה סגורה. נקרא לתחום שהיא חוסמת G. לפי משפט גרין:

$$\int\limits_{\Gamma} xe^x \mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y = \int\limits_{G} y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I$$

מצד שני,

$$\begin{aligned}I &= \int\limits_{\gamma_1} xe^x \mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y + \int\limits_{\gamma_2} xe^x \mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y + \int\limits_{\gamma} xe^x \mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y = \\ &= \int\limits_0^1 0\,\mathrm{d}t + \int\limits_0^1 te^t\,\mathrm{d}t + \int\limits_{\gamma} xe^x \mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y = \\ &= 0+1+\int\limits_{\gamma} xe^x \mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y\end{aligned}$$

נותר לחשב את I. נעבור לקואורדינטות פולריות:

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^1 r\sin\theta\cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}$$

בסך הכל, האינטגרל בשאלה הוא $-\frac{2}{3}$.