חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

ⓒ ארזים

19 ביוני 2017

1 תבניות

משפט 1.1 (למת פואנקרה) אם $U \subseteq \mathbb{R}^n$ כדור, ω תבנית דיפרנציאלית מסדר 1 בתוך U, אזי ω מדוייקת אם ורק אם היא סגורה.

משפט 1.2 (גרין) אם $G \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום, $\partial G = \gamma$ מורכבת מאיחוד סופי של עקומות חלקות באוריינטציה חיובית. אזי לכל תבנית דפרנציאלית C^1 מהצורה $\omega = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ מתקיים

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \iint\limits_{G} \left(Q_x - P_y\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

תרגיל יהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום חסום וקמור עם שפה חלקה $\mathbb{C}^\infty$. הראו את האי שוויון האיזו פרמטרי:

$$\mathrm{length}\left(\partial\Omega\right)^2 \geq 4\pi \mathrm{area}\left(\Omega\right)$$

והשוויון הוא אם ורק אם Ω עיגול.

פתרון נניח כי האורך של $\partial\Omega$ הוא 2π. תהי $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ פרמטריזציה של $\partial\Omega$ עם אוריינטציה חיובית כך שמתקיים $|\gamma'(t)| = 1$ (פרמטריזציה לפי אורך). כעת,

$$\mathrm{length}\left(\gamma\right) = \int\limits_0^{2\pi} \left|\gamma'(t)\right|\,\mathrm{d}t = 2\pi$$

נכתוב כעת

$$\gamma(t) = \left(x(t), y(t)\right)$$

כאשר אלה מחזוריות וחלקות C^∞. נכתוב

$$x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$$

$$y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{int}$$

נוכל לגזור:

$$x' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i n a_n e^{int}$$
$$y' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i n b_n e^{int}$$

ניזכר שמתקיים

$$\int_0^{2\pi} e^{iNt}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi & N=0 \\ 0 & o/w \end{cases}$$

ומכאות אם ניקח את התבנית $\frac{1}{2}\left(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x\right)$, שמקיימת $Q_x - P_y = 1$, ולכן תאפשר לנו לחשב את הנפח. נפעיל את משפט גרין:

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int}\cdot imb_m e^{imt} - ina_n e^{int}\cdot b_m e^{imt}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} -ina_n b_{-n} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} ima_{-m}b_m\right) =$$
$$= \pi\sum_{n\geq 0} n\left(a_n\overline{b_n} - b_n\overline{a_n}\right)$$

כעת נותר רק להוכיח

$$\mathrm{area}\left(\Omega\right) \leq \frac{\left(\mathrm{Length}\left(\gamma\right)\right)^2}{4\pi} \leq \pi$$

מספיק להוכיח

$$S = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|a_n\overline{b_n} - \overline{a_n}b_n\right| |n| \leq 1$$

כעת,

$$\left|a_n\overline{b_n} - \overline{a_n}b_n\right| \leq |a_n|^2 + |b_n|^2$$

ונקבל

$$S \leq \sum_{n=\infty}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) n^2 = 1$$

וזאת משום שמתקיים

$$2\pi = \int_0^{2\pi} \left|\gamma'\left(t\right)\right|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left|\gamma'\left(t\right)\right|^2\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left|x'\left(t\right)\right|^2 + \left|y'\left(t\right)\right|^2 = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2|a_n|^2 + n^2|b_n|^2$$