חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

12 ביוני 2017

1 תבניות דיפרנציאליות לינאריות (מסדר ראשון)

ראשית נזכיר שעקומה היא ההעתקה $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ חלקה למקוטעין, באשר $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע. סימנו $T_x\mathbb{R}^n$ את המרחב המשיק של $\mathbb{R}^n$ בנקודה x, וכן $\left(T_x\mathbb{R}^n\right)^*$ את המרחב הקו־משיק, הדואלי למרחק המשיק.

הגדרה 1.1 תבנית דיפרנציאלית לינארית היא העתקה

$$\begin{aligned} \omega : \mathbb{R}^n &\to \left(T_x\mathbb{R}^n\right)^* \\ x &\mapsto \omega_x \end{aligned}$$

דוגמא אם $f \in C^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ אזי $df_x \in \left(T_x\mathbb{R}^n\right)^*$ תבנית דיפרנציאלית לינארית.

1.1 בסיסים וקצת אלגברה לינארית

נקבע בסיס אורתוגונלי $e_1, \ldots, e_n$ של $T_x\mathbb{R}^n$. קיים בסיס אורתוגונלי יחיד של $\left(T_x\mathbb{R}^n\right)^*$, שנסמנו $\{\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n\}$ המקיים

$$\mathrm{d}x_j\left(e_i\right) = \delta_{i,j}$$

לגבי הסימון, אם x_j היא ההעתקה שלוקחת את x לקואורדינטה j שלה בבסיס $e_1, \ldots, e_n$, אזי $\mathrm{d}x_j$, כפי שהוגדר, הוא באמת הדיפרנציאל של x_j. למשל, אם $f \in C^1\left(\mathbb{R}^n\right)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in T_x\mathbb{R}^n$, אזי

$$\mathrm{d}f_x\left(y\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i\left(y\right)$$

בסך הכל,

$$\mathrm{d}f_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$$

באופן כללי, עבור תבנית ω_x קיימות פונקציות $a_1\left(x\right), \ldots, a_n\left(x\right)$ עם

$$\omega_x = \sum_{i=1}^{n} a_i\left(x\right) \mathrm{d}x_i$$

הגדרה 1.2 אם $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ היא עקום חלק אזי

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{I} \omega_{\gamma(t)} \left(\dot{\gamma}\left(t\right)\right) \mathrm{d}t$$

הגדרה 1.3 נאמר כי ω מדוייקת אם קיימת $f \in C^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ עם $\mathrm{d}f = \omega$. f כזו נקראת קדומה של ω או פוטנציאל של ω.

נאמר כי ω סגורה אם לכל i, j מתקיים

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

נשים לב שאם ω מדוייקת אזי בהכרח היא סגורה.

משפט 1.4 אם ω תבנית דיפרנציאלית לינארית בתחום U עם מקדמים רציפים, אזי התנאים הבאים שקולים:

1. לכל עקום סגור $\gamma \subseteq U$ מתקיים $\int_{\gamma} \omega = 0$.
2. לכל שני עקומים $\gamma_1, \gamma_2 \subseteq U$ עם נקודת התחלה וסוף זהות, מתקיים

$$\int\limits_{\gamma_1} \omega = \int\limits_{\gamma_2} \omega$$

3. ωשמדוייקת.

הערה 1.5 אם ω מדוייקת עם קדומה f, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ אזי

$$\int\limits_{\gamma} \omega = f\left(\gamma\left(a\right)\right) - f\left(\gamma\left(b\right)\right)$$

תרגיל חשבו את

$$\int\limits_{\gamma} \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

כאשר γעקום שמתחיל מנקודה שבה $x^2 + y^2 + z^2 = r_1^2$ ומסתיים בנקודה שבה $x^2 + y^2 + z^2 = r_2^2$.

פתרון נגדיר את מה שבתוך האינטגרל להיות ω. נחפש לה קדומה ־ כלומר f עם

$$\nabla f\left(x,y,z\right)=\frac{\left(x,y,z\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

זה מתקיים עבור $f\left(x\right)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ולכן התבנית מדוייקת. מכאן,

$$\int\limits_{\gamma}\omega=r_2-r_1$$

תרגיל חשבו את

$$\int\limits_{\gamma}x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x$$

כאשר γ מסילה המחברת את $(0,0)$ עם $(1,1)$ במקרים הבאים:

1. γ קו ישר.
2. γ נמצאת על הפרבולה $y=x^2$.

פתרון במקרה הראשון, $\gamma\left(t\right)=\left(t,t\right)$, $\dot{\gamma}\left(t\right)=\left(1,1\right)$ ולכן

$$\int\limits_{\gamma}\omega=\int\limits_{\gamma}t-t=0$$

במקרה השני,

$$\begin{aligned}\gamma\left(t\right)&=\left(t,t^2\right)\\ \dot{\gamma}\left(t\right)&=\left(1,2t\right)\end{aligned}$$

ואז

$$\int\limits_{\gamma}\omega=\int\limits_{0}^{1}2t^2-t^2=\int\limits_{0}^{1}t^2=\frac{1}{3}$$