חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

20 במרץ 2017

תזכורת תהי $f : A \to B$. נאמר כי f רציפה בנקודה a אם

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \;\; d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

תזכורת תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $W \subseteq A$. נאמר כי W פתוחה יחסית בתוך A אם קיימת $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה כך שמתקיים $W = A \cap U$. למשל, $[0, 1)$ פתוחה יחסית בקטע $[0, \infty)$ כי

$$(-1, 1) \cap [0, \infty) = [0, 1)$$

תרגיל יהיו $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ קבוצות, $f : \mathbb{R}^n \to B$. אזי f רציפה בקבוצה A אם ורק אם לכל קבוצה $S \subseteq B$ פתוחה יחסית, $f^{-1}(S) \subseteq A$ פתוחה יחסית.

פתרון בכיוון הראשון, יהי $a \in A$ ויהי $\varepsilon > 0$. נגדיר

$$S = B_\varepsilon(f(a)) \cap B = \{y \in B \mid d(y, f(a)) < \varepsilon\}$$

S פתוחה יחסית בתוך B. מההנחה, הקבוצה $f^{-1}(S)$ פתוחה יחסית בתוך A ובנוסף $a \in f^{-1}(S)$. לכן קיימת $\delta > 0$ כך שמתקיים

$$B_\delta(a) \cap A = \{x \in A \mid d(x, a) < \delta\} \subseteq f^{-1}(S)$$

בכיוון השני, נניח כי f רציפה בתוך A, ותהי $S \subseteq B$ פתוחה יחסית. יהי $a \in f^{-1}(S)$. נרצה להראות שקיימת $\delta > 0$ כך שמתקיים

$$B_\delta(a) \cap A = \{x \in A \mid d(x, a) < \delta\} \subseteq f^{-1}(S)$$

S פתוחה יחסית, וכן $f(a) \in S$, ולכן קיים $\varepsilon > 0$ עבורו

$$B_\varepsilon(f(a)) \cap B = \{y \in B \mid d(y, f(a)) < \varepsilon\} \subseteq S$$

מרציפות קיימת $\delta > 0$ עבורה מה שרצינו מתקיים.

סימונים מטריצות מסדר n:

$$M_{n\times n}\left(\mathbb{R}\right)\cong\mathbb{R}^{n^{2}}$$

מטריצות סימטריות מסדר n:

$$M_{n\times n}^{s}\left(\mathbb{R}\right)\cong\mathbb{R}^{\frac{n^{2}+n}{2}}$$

מטריצות אנטיסימטריות מסדר n:

$$M_{n\times n}^{as}\left(\mathbb{R}\right)\cong\mathbb{R}^{\frac{n^{2}-n}{2}}$$

מטריצות אורתוגונליות מסדר n:

$$O_{n}$$

תרגיל מצאו הצגה סתומה עבור O_{n}, כלומר מצאו העתקה

$$F:\mathbb{R}^{n^{2}}\to\mathbb{R}^{\frac{n^{2}+n}{2}}$$

כאשר F רגולרית על O_{n} (הדיפרנציאל של F מדרגה מקסימלית) וכן $O_{n}=F^{-1}\left(0\right)$.

פתרון ניזכר כי $A\in O_{n}$ אם ורק אם

$$AA^{t}=I$$

נגדיר כעת:

$$F\left(A\right)=AA^{t}-I$$

נשים לב שהתמונה היא תמדי מטריצה סימטרית: אפשר לחשוב על F בתור

$$F:M_{n\times n}\to M_{n\times n}^{s}$$

כמו כן

$$F^{-1}\left(0\right)=O_{n}$$

נגזור את ההעתקה בנקודה $A\in O_{n}$ בכיוון B:

$$\begin{aligned}D_{B}F\left(A\right)&=\lim_{h\to0}\frac{F\left(A+Bh\right)-F\left(A\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\left(A+Bh\right)\left(A+Bh\right)^{t}-I-AA^{t}+I}{h}=\\&=\lim_{h\to0}\frac{hBA^{t}+hAB^{t}+h^{2}BB^{t}}{h}=BA^{t}+AB^{t}=BA^{t}+\left(BA^{t}\right)^{t}\end{aligned}$$

כעת נקבל כי $D_BF(A)=0$ אם ורק אם BA^t אנטיסימטרית. לכן

$\ker(DF(A))=\left\{B\in M_{n\times n}\mid BA^t\in M_{n\times n}^{as}\right\}$

לקחנו $A\in O_n$, לכן A הפיכה, ולכן $\dim\ker(DF(A))=\frac{n^2+n}{2}$,

$$F:\mathbb{R}^{n^2}\to\mathbb{R}^{\frac{n^2+n}{2}}$$

וכעת $\frac{n^2-n}{2}-n^2=\frac{n^2+n}{2}$ ולכן הדיפרנציאל מדרגה מקסימלית כי הוא על.