

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

20 בדצמבר 2016

1 מדידות

הגדרה 1.1 קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}^n$ היא מנפח 0 אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימות תיבות (פתוחות או סגורות) $Q_1, \dots, Q_m$ שמתקיים

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^m Q_i$$

וכן

$$\sum_{i=1}^m \nu(Q_i) < \varepsilon$$

אם קיים כיסוי כזה שהוא בן מניה, E נקראת זניחה.

למשל, $\mathbb{Q}$ זניחה בתור $\mathbb{R}$, אבל לא מנפח 0.

1.1 קבוצת קנטור

נגדיר $K_1 = [0, 1]$. K_n מתקבל על ידי הסרת השליש המרכזי מכל קטע של K_{n-1} . נסמן את קבוצת קנטור:

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$$

(בנייה הרבה יותר פורמלית וברורה אפשר למצוא בסיכום הרצאה 8 בפונקציות ממשיות, חורף 2016).

K סגור, והפנים שלו ריק. נסמן $U = [0, 1] \setminus K$, ונטען כי $\partial U = K$. מכאן $\text{Int} K = \emptyset$. שכן סביבה של כל נקודה מתוך K תחתוך את U . יהי $x \in \partial U$. U פתוחה, כלומר $\partial U = \overline{U} \setminus U$, ואלו נקודות שאינן בתוך U ולכן הן בתוך K .

יהי $x \in K$. בפרט, $x \in K_n$, ולכן נמצא בקטע מאורך $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ שכולו בתוך K . לכן יש $y_n \notin K$ עם $|y_n - x| < \left(\frac{1}{3}\right)^n$, ולכן $y_n \rightarrow x$, כלומר $\overline{U} \setminus U = \partial U$.

לבסוף, K מנפח 0, פשוט כי K_n מהווה כיסוי של K מאורך כולל $\rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n = 2^n \left(\frac{1}{3}\right)^n$. 0.

כעת נדון בקבוצת קנטור המלאה: אותו רעיון, רק במקום להוציא דווקא שליש, מוציאים את החלק ε_n האמצעי של כל קטע. אזי

$$\nu(K_n) = (1 - \varepsilon_n) \nu(K_{n-1}) = \prod_{i=1}^n (1 - \varepsilon_i)$$

אם $\nu(K_n) \rightarrow 0$, אזי K מנפח אפס, כמו קודם.

תרגיל

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (1 - \varepsilon_i) = 0 \iff \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = \infty$$

פתרון נוכיח רק צד אחד. נניח שהטור מתבדר. לכל $x \in (0, 1)$ מתקיים $e^{-x} > 1 - x$, ואז

$$e^{-\sum \varepsilon_i} = \prod e^{-\varepsilon_i} > \prod (1 - \varepsilon_i)$$

אם הטור מתבדר, אז אגף שמאל שואף אל 0, ולכן גם המכפלה.

נבחר ε_n כך שהטור יתכנס, ועכשיו נגדיר $U = [0, 1] \setminus K$. אזי $\partial U = K$ אינה זניחה, ולכן U פתוחה ולא מדידה ז'ורדן.

תרגיל $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ העתקה C^1 ונסמן $E = \{x \mid f(x) = 0\}$. אם לכל $x \in E$ מתקיים $\nabla_x f \neq 0$ אזי E זניחה.

פתרון יהי $x \in E$. יש $1 \leq i \leq n$ עבורו $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \neq 0$, ובלי הגבלת הכלליות $i = 1$. אזי יש סביבה U_x של x כך שהקבוצה $U_x \cap E$ היא גרף של x_1 כפונקציה חלקה של $x_2, \dots, x_n$. נבחר Q_x תיבה עם קודקודים רציונליים עבורה $x \in Q_x \subseteq U_x$. אזי $Q_x \cap E$ זניחה, וכן

$$E = \bigcup_{x \in E} (Q_x \cap E)$$

זהו איחוד בן מניה של קבוצות זניחות, ולכן E זניח.

תרגיל תהי $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ העתקה C^1 , כאשר $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה. אם $X \subseteq U$ זניחה אזי $f(X)$ זניחה.

פתרון נסמן $K : U \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $K(x) = \|\nabla_x f\|_{op}$. לכל $x \in U$ יש קוביה V_x בה $K \leq K_x$. לכן לכל $x, y \in V_x$ מתקיים

$$|f(x) - f(y)| \leq K_x |x - y|$$

נסמן עבור $y \in U$, $X_y = X \cap V_y$, ואז

$$f(X) = \bigcup_{y \in U} f(X \cap V_y)$$

$X \cap V_y$ זניחה, $f|_{V_y}$ ליפשיץ, ולכן $f(X \cap V_y)$ גם זניחה. לכן $f(X)$ היא איחוד בן מניה של זניחות, כלומר זניחה.