

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

13 בדצמבר 2016

1 כופלי לגראנז

ניזכר באי שוויון הממוצעים: ניקח $x_1, \dots, x_n = 0$ ונרצה להראות כי מתקיים

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

שני האגפים הומוגניים, אז על ידי ההצבה

$$y_i = \frac{x_i}{x_1 + \dots + x_n}$$

נקבל שמספיק להראות

$$\left(\frac{1}{n}\right)^n \geq x_1 \dots x_n$$

תחת האילוץ $x_1 + \dots + x_n = 1$. פונקציית המטרה היא $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n$ והאילוץ הוא $g(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n - 1$. מתקיים

$$\begin{aligned}\nabla f &= \left(\frac{f}{x_i}\right)_i \\ \nabla g &= (1, \dots, 1)\end{aligned}$$

ממשפט כופלי לגראנז, בנקודת הקיצון מתקיים $\nabla f = \lambda \nabla g$, ולכן לכל i, j מתקיים $x_i = x_j$, כלומר $x_i = \frac{1}{n}$ לכל i . זו הנקודה החשודה היחידה. בקבוצה $\{x \mid x_i \geq 0, \sum x_i = 1\}$, שהיא קומפקטית, יש לפונקציה f מקסימום, כי היא רציפה. נסמן $x_{\max}$ נקודת מקסימום כזו. אם יש לה קואורדינטה שמתאפסת אזי $f(x_{\max}) = 0$, אבל $f\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) > 0$, לכן המקסימום לא בשפה. לכן סיימנו.

2 אינטגרלים

דיון מאוד אבסטרקטי על אינטגרלים, המון ציורים ודברים כאלה. הסיכום הזה הולך להיות די פתטי.

נרצה לתת התאמה $\nu : S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, עבור קבוצת קבוצות כלשהי S , כך שמתקיים $A \subseteq B \Rightarrow \nu(A) \leq \nu(B)$ וכל מיני אקסיומות טובות אחרות. בלי הגבלת הכלליות נניח כי ν נותנת 1 לתיבת היחידה. אפשר גם לראות ששטח פנים של תיבות שמוכלות זו בזו מקיים אי שוויון דומה ונתן, כאשר שטח פנים מוגדר באופן האינטואיטיבי על $\mathbb{R}^n$.

טענה 2.1 תהא B תיבה בתוך $\mathbb{R}^n$ ויהיו $f_n : B \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרביליות. אם $f_n \xrightarrow{u} f$ אזי f אינטגרבילית וכן

$$\int_B f_n \rightarrow \int_B f$$

הוכחה: תהא P חלוקה של B . נחשב:

$$|S(f, P) - s(f, P)| \leq |S(f, P) - S(f_n, P)| + |s(f_n, P) - s(f, P)| + |S(f_n, P) - s(f_n, P)|$$

■ המחובר האחרון קטן, כי f_n אינטגרבילית לכל n .

הערה 2.2 התכנסות נקודתית לא מספיקה: נמנה את $\mathbb{Q}$, למשל $\{r_1, r_2, \dots\}$ ונגדיר

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \{r_1, \dots, r_n\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

כל אחת מאלה אינטגרבילית עם אינטגרל אפס, והגבול הנקודתי הוא פונקציית דיריכלה. מתקיים

$$|S(f, P) - S(f_n, P)| \leq \sum_{C \in P} \text{vol}(C) \left| \sup_C f - \sup_C f_n \right| \leq \sum_{C \in P} \text{vol}(C) \sup_C |f_n - f|$$

לכן עבור n גדול מספיק גם זה קטן, ובאותה צורה חוסמים גם את ההפרש בין הסכומים התחתונים. השוויון של האינטגרלים נובע כי

$$\left| \int_B f - \int_B f_n \right| = \left| \int_B f - f_n \right| \leq \int_B |f - f_n| \leq \varepsilon \int_B 1 = \varepsilon \text{vol}(B)$$

ולכן סיימנו.