

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

29 בנובמבר 2016

1 משפט הפונקציה הסתומה

יהיו $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m, n \geq m$, ותהי $f : U \rightarrow V$. בהינתן $y \in V$, אנחנו חוקרים את

$$f^{-1}(y) = \{x \in U \mid f(x) = y\}$$

"סיב" זה הוא $n - m$ מימדי.

כעת, אם x נקודה רגולרית, כלומר $D_x f$ מדרגה מלאה, אזי יש קואורדינטות שנקבעות ביחידות לפי הקואורדינטות האחרון (באופן מקומי). אלה שנקבעות הן אלה שהן העמודות של המינור ההפיך בדיפרנציאל.

משפט 1.1 תהי $f : \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, \dots, x_{n-m}, y_1, \dots, y_m)$. נניח כי $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ הפיכה בנקודה (x, y) , עבורה $f(x, y) = c$. אזי יש סביבה U של x וסביבה V של y , כמו גם העתקה C^k (אותו k שעבורו f היא C^k) $g : U \rightarrow V$ עבורה מתקיים

$$f^{-1}(c) \cap (U \times V) = \{(x, g(x)) \mid x \in U\}$$

ואפשר לחשב את $D_x g$ - הוא נתון על ידי $-M^{-1}D$, כאשר M הוא המינור הלא מנוון של הדיפרנציאל, D הוא "שאר הדיפרנציאל". בניסוח המשפט:

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}$$

תרגיל הוכיחו כי המערכת

$$\begin{aligned} x + yz - z^3 - 1 &= 0 \\ x^3 - xz + y^3 &= 0 \end{aligned}$$

מגדירה את x, y כפונקציה של z ליד $(1, -1, 0)$. מהו $\frac{\partial x}{\partial z}(0)$, $\frac{\partial y}{\partial z}(0)$?

פתרון $(1, -1, 0)$ פותר את המערכת. נגדיר

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ f(x, y, z) &= (x + yz - z^3 - 1, x^3 - xz + y^3) \end{aligned}$$

הפתרונות למערכת הם בדיוק $f^{-1}(0)$. נחשב:

$$Df = \begin{pmatrix} 1 & z & y - 3z^2 \\ 3x^2 - z & 3y^2 & -x \end{pmatrix}$$

נציב עבור $(1, -1, 0)$ ונקבל

$$Df = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

המינור 2×2 השמאלי הוא הפיך, ולכן אכן x, y פונקציות של z , ממשפט הפונקציה הסתומה. מתקיים

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ואז מתקיים

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial z} \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

משפט 1.2 1. תהי A_0 מטריצה סימטרית ויהי λ_0 ערך עצמי פשוט של A (כלומר מריבוי 1). יהי u_0 ווקטור עצמי של λ_0 מנורמה 1. אזי יש סביבה U של A_0 , כך שלכל $A \in U$ יש ערך עצמי פשוט λ ווקטור עצמי מתאים u מנורמה 1, כך שיש קשר C^1 בין λ לבין A .

2. אם $A(t)$ מסילה חלקה של מטריצות כך שמתקיים $A(0) = A_0$, וניקח את $u(t), \lambda(t)$ המובטחים לנו מסעיף 1, אזי מתקיים

$$\dot{\lambda}(0) = u_0^T \dot{A}(0) u_0$$

הוכחה: נגדיר

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ F(\lambda, u, A) &= ((\lambda I - A)u, \|u\|^2 - 1) \end{aligned}$$

כעת מתקיים

$$F(\lambda_0, u_0, A_0) = 0$$

אנחנו מעוניינים כמובן בסיב $F^{-1}(0)$. נחשב את הדיפרנציאל:

$$D_{(\lambda_0, u_0, A_0)} F = \begin{pmatrix} u_0 & \lambda_0 I - A_0 & * \\ 0 & 2u_0 & 0 \end{pmatrix}$$

נניח כי

$$a_0 c_1 + \dots + a_n c_n = 0$$

כאשר c_i הן עמודות הדיפרנציאל DF . אזי נובע כי

$$a_0 u_0 + (\lambda_0 I - A_0) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\left\langle 2u_0, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\text{נסמן } v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ אזי}$$

$$\begin{aligned} a_0 u_0 + (\lambda_0 I - A_0) v &= 0 \\ \langle u_0, v \rangle &= 0 \end{aligned}$$

נוכל לכתוב

$$\begin{aligned} a_0 (\lambda_0 I - A_0) u_0 + (\lambda_0 I - A_0)^2 v &= 0 \\ (\lambda_0 I - A_0)^2 v &= 0 \end{aligned}$$

לכן $v \in \ker(\lambda_0 I - A_0)^2$. נסמן $\lambda_0 I - A_0 = B_0$. אבל גרעין זה חד מימדי (כי $\ker B_0$ חד מימדי, כי הריבוי של λ_0 הוא 1). אבל, מהמשוואה השנייה, $u_0 \perp v$, ולכן נובע בהכרח $v = 0$. נובע מכאן גם $a_0 = 0$, ולכן יש לנו מינור הפיך $n+1 \times n+1$. בסביבת A_0 , נובע כי λ, u הן פונקציות C^1 של A . מתקיים

$$(\lambda(t) I - A(t)) u(t) = 0$$

נגזור לפי t ונקבל

$$\dot{\lambda}(0) u_0 + \lambda_0 \dot{u}(0) - \dot{A}(0) u(0) - A(0) \dot{u}(0) = 0 \quad (1)$$

כמו כן,

$$\langle u(t), u(t) \rangle = 1$$

נגזור ונקבל

$$2 \langle \dot{u}(0), u(0) \rangle = 0$$

נכפיל סקלרית את המשוואה (1) בוקטור u_0 .

$$\dot{\lambda}(0) - \left\langle \dot{A}(0) u_0, u_0 \right\rangle - \langle A_0 \dot{u}(0), u_0 \rangle = 0$$

$$\dot{\lambda}(0) - \left\langle \dot{A}(0) u_0, u_0 \right\rangle - \langle \dot{u}(0), A_0 u_0 \rangle = 0$$

$$\dot{\lambda}(0) - \left\langle \dot{A}(0) u_0, u_0 \right\rangle - \lambda \langle \dot{u}(0), u_0 \rangle = 0$$

$$\dot{\lambda}(0) = \left\langle \dot{A}(0) u_0, u_0 \right\rangle$$

■