

### חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

22 בנובמבר 2016

#### 1 משמעות גיאומטרית של דיפרנציאל

נניח כי  $f \in C^1(U, V)$  כאשר  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחה וכן  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  פתוחה. נגדיר מסילה  $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  כך שמתקיים  $\gamma(0) = x$  וכן  $\dot{\gamma}(0) = v$ . אזי נגדיר

$$\begin{aligned} d_x f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ d_x f(v) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma(t)) \end{aligned}$$

כאשר כאן,  $\mathbb{R}^n$  הוא למעשה ווקטורים שמתחילים בנקודה  $x$ ,  $\mathbb{R}^m$  בהתאם הוא ווקטורים שמתחילים בנקודה  $f(x)$ .

#### 1.1 שימושים

##### 1.1.1 גזירה נוחה יותר

נניח ניקח העתקה  $F : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$  שהיא  $F(A) = A^{-1}$ . כמובן מתקיים  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj} A$ . נחשב את הדיפרנציאל בנקודה  $A$ . ניקח מסילה  $A_s$  עם  $A_0 = A$ ,  $\dot{A}(0) = B$ . אזי

$$d_A F(B) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (A_s)^{-1}$$

מתקיים  $A_s^{-1} \cdot A_s = \text{Id}$ . נגזור לפי  $s$  ונקבל

$$\left( \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} A_s^{-1} \right) \cdot A_s + (A_s^{-1}) \frac{d}{ds} A_s = 0$$

נציב כעת  $s = 0$

$$\begin{aligned} \left( \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} A_s^{-1} \right) A + A^{-1} B &= 0 \\ \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} A_s^{-1} &= -A^{-1} B A^{-1} \end{aligned}$$

### 1.1.2 נקודות קריטיות

**הגדרה 1.1** תהי  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה ברציפות ( $U \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחה).  $x \in U$  נקראת קריטית אם  $\nabla_x f = 0$ .

**דוגמא**  $x$  מינימום מקומי. אזי לכל מסילה  $\gamma$  עם  $\gamma(0) = x$ ,  $f(\gamma(t))$  בעלת מינימום מקומי בנקודה 0, ולכן

$$\langle \nabla_x f, \dot{\gamma}(0) \rangle = d_x f(\dot{\gamma}(0)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\gamma(t)) = 0$$

כלומר

$$\nabla_x f = 0$$

זה שהגרדיאנט יתאפס לא מספיק. אם הגרדיאנט מתאפס בנקודה  $x$ , נגדיר את המטריצה

$$H = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j} (x)$$

ההסיאן של  $f$  בנקודה  $x$ . אם  $H$  הפיכה, אזי  $x$  נקודה קריטית לא מנוונת. אם כל הערכים העצמיים של  $H$  שליליים, נקודת מקסימום, ואם כל הערכים העצמיים חיוביים,  $x$  היא מינימום. אחרת - נקודת אוכף.

## 2 משפט הפונקציה הסתומה

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  עבור  $f$  גזירה ברציפות. כאשר  $f(x) = c$ , ונניח כי  $d_x f$  הוא מדרגה מלאה. אזי ליד  $x$ , הסיב  $f^{-1}(c)$  הוא ממימד  $n - m$ , כלומר יש  $m$  קואורדינטות שהן פונקציות של השאר (כמובן  $n > m$ ).

אם המינוור ההפיך של הדיפרנציאל הוא בעל העמודות  $\frac{\partial F}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_{i_m}}$  - אזי קואורדינטות  $C^1$  של השאר.