

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

15 בנובמבר 2016

1 דיפרנציאביליות

הגדרה 1.1 תהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, ותהי $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ פונקציה. דיפרנציאבילית בנקודה $x \in U$ אם קיימת העתקה לינארית $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, שנקראת הדיפרנציאל של F בנקודה x , אם מתקיים

$$F(x+h) - F(x) = hA(x) + o(|h|)$$

תרגיל תהי F דיפרנציאבילית בנקודה 0 , ונניח כי

$$c = \|d_0 F\| \leq 1$$

אזי קיים כדור B סביב 0 עבורו $F(B) \subseteq B$.

פתרון

$$\|F(h)\| = \|d_0 F(h) + o(\|h\|)\| \leq \|d_0 F(h)\| + o(\|h\|) \leq c \cdot \|h\| + o(\|h\|)$$

לכן

$$\frac{\|F(h)\|}{\|h\|} \leq c + \frac{o(\|h\|)}{\|h\|}$$

ניקח $h < r$, עבור r קטן מספיק, ונקבל

$$\frac{\|F(h)\|}{\|h\|} \leq c + \left(1 - \frac{c}{2}\right) < 1$$

נצטמצם למקרה $m = 1$. $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, ונקח $x \in U$. נתבונן בהעתקה $d_x f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. מהלמה של ריס יש ווקטור $\nabla_x f \in \mathbb{R}^n$ כך שלכל $u \in \mathbb{R}^n$ מתקיים

$$d_x f(u) = \langle u, \nabla_x f \rangle$$

חישוב נניח $\|u\| = 1$, מה שלא משנה כי העניין הוא הכיוון.

$$|d_x f(u)| = |\langle u, \nabla_x f \rangle| \leq \|u\| \|\nabla_x f\| = \|\nabla_x f\|$$

שוויון מושג אם ורק אם הווקטורים פרופורציוניים (תלויים לינארית), ולכן $d_x f(u)$ מקסימלי בערכו המוחלט בכיוון $\nabla_x f$.

תרגיל תהי $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות, ותהא $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ מסילה גזירה כך שלכל t מתקיים $f(\gamma(t)) = c$ וכן $\gamma(0) = p \in U$. אזי

$$\langle \gamma'(0), \nabla_p f \rangle$$

פתרון נגזור את הנתון בנקודה $t = 0$.

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) &= c \\ \langle \nabla_p f, \gamma'(0) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

תרגיל תהי U פתוחה קשירה, ותהי $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה ברציפות עם $\nabla f = 0$ על U . אזי f קבועה.

פתרון ממשפט לגראנז', אם U קמורה, ניקח $x, y \in U$

$$f(y) - f(x) = d_c f(y - x) = \langle \nabla_c f, y - x \rangle = 0$$

כעת, אם U לא קמורה, היא פתוחה, ולכן לכל נקודה יש סביבה כדור פתוח. כדור זה הוא קמור, ולכן f קבועה מקומית. כאן נסיים, מהלמה הבאה שננסח.

למה 1.2 תהי A קשירה ונניח כי $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה וקבועה מקומית. אזי f קבועה.

הוכחה: יהי $x_0 \in A$, ונסמן $f(x_0) = c$. נגדיר

$$\begin{aligned} U &= \{x \mid f(x) \neq c\} \\ V &= \{x \mid f(x) = c\} \end{aligned}$$

מתקיים $U = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{c\})$, ולכן היא פתוחה, כלומר מהצורה $U' \cap A$, עבור U' פתוחה בתוך $\mathbb{R}^n$. לכל $x \in V$ יש סביבה V_x פתוחה, כך שמתקיים $V_x \cap A \subseteq V$. לכן

$$V = A \cap \left(\bigcup_{x \in V} V_x \right)$$

לפי תרגיל בית, אחת מבין U, V ריקה, אבל $x_0 \in V$, ולכן $U = \emptyset$, כלומר f קבועה. ■