

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

8 בנובמבר 2016

1 חזרה

1.1 קומפקטיות

משפט 1.1 התנאים הבאים שקולים עבור $K \subseteq \mathbb{R}^n$:

1. K סגורה וחסומה.
2. לכל כיסוי פתוח של K יש תת כיסוי סופי.
3. לכל $f, f \in C(K, \mathbb{R})$ חסומה.
4. לכל סדרה $\{x_n\} \subseteq K$ יש תת סדרה $\{x_{n_k}\}$ שמתכנסת לגבול $x \in K$.

הוכחה: $2 \iff 1$: משפט מחדו"א 2.

$1 \Rightarrow 3$: הפונקציה $\|\cdot\|$ חסומה על K , ולכן K חסומה. אם $y \in \partial K \setminus K$ נקח $f = \frac{1}{\|y-x\|}$, וזו לא חסומה (נקח סדרה $\{x_n\} \subseteq K$ שמכתנסת אל y).
 $3 \Rightarrow 2$: תהא $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה. מתקיים

$$K = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}((-i, i))$$

מטענה מתרגיל בית, $f^{-1}((-i, i)) = K \cap U_i$ כאשר $U_i \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה. אזי $K \subseteq \bigcup U_i$. ניקח תת כיסוי סופי, ונסיק כי $K \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_l}$ ואז $|f| \leq \max\{i_1, \dots, i_l\}$.
 $4 \Rightarrow 1$: תהא $\{x_n\} \subseteq K$ סדרה זו חסומה, ולכן יש לה תת סדרה מתכנסת, שנסמן את גבולה k . סגורה, ולכן $k \in K$.
 $1 \Rightarrow 4$: אם K לא חסומה, ניקח $x_n \in K$ עבורו $\|x_n\| > n$. מתבדרת. אם $y \in \partial K \setminus K$ נקח $\{x_n\} \subseteq K$ עבורה $x_n \rightarrow y$, וכל תת סדרה שלה תתכנס אל y , אבל $y \notin K$ - סתירה. ■

1.2 קשירות

הגדרה 1.2 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת קשירה מסילתית אם לכל $x, y \in A$ יש $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ רציפה עבורה $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

משפט 1.3 עבור $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, התנאים הבאים שקולים:

1. U קשירה מסילתית.

2. U קשירה פוליגונלית.

בשביל ההוכחה משתמשים בתרגיל:

תרגיל אם K קומפקטית, $f: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ רציפה, אז $f(K)$ קומפקטית.

הוכחה: מוכרת מחדוא 2. סביב כל נקודה על המסילה בין x, y ניקח כדור שמוכל בקבוצה. המסילה קומפקטית, כי היא התמונה של $[0, 1]$, ולכן יש תת כיסוי סופי של הכדורים האלה, ואז ניתן לקחת קטעים שמעבירים בין החיתוכים של הכדורים הללו. ■

1.3 נורמות של מטריצות

הגדרה 1.4 לכל $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ לינארית, נגדיר

$$\|A\|_{HS} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2}, \|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

נשים לב כי מתקיימים שני דברים: לכל A, B לינאריות, ולכל x ,

$$\begin{aligned} \|Ax\| &\leq \|A\| \|x\| \\ \|AB\| &\leq \|A\| \|B\| \end{aligned}$$

בנוסף, כל הנורמות שקולות, כלומר

$$A_n \xrightarrow{HS} A \iff A_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} A$$

משפט 1.5 אוסף המטריצות הלכסינות צפוף בתוך $M_n(\mathbb{C})$.

הוכחה: ראשית, נשים לב כי נורמה אופרטורית נשמרת בדימיון (תרגיל). נקח $A \in M_n(\mathbb{C})$, וניקח $B = PAP^{-1}$ משולשית עליונה. נסמן את איברי האלכסון של B בתור $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. נגדיר $\tilde{B}_\varepsilon$ שזוהי בכל מקום למטריצה B - פרט לאיברי האלכסון, שאותם נשנה מעט מאוד, לכל היותר ε , כך שכולם יהיו שונים. אז $\tilde{B}_\varepsilon \xrightarrow[HS]{\varepsilon \rightarrow 0} B$, כלומר $\tilde{B}_\varepsilon \xrightarrow[\|\cdot\|_2]{\varepsilon \rightarrow 0} B$. לכן ■

$$P^{-1}\tilde{B}_\varepsilon P \rightarrow P^{-1}BP = A \text{ אבל } P^{-1}\tilde{B}_\varepsilon P \text{ לכסינה, ולכן סיימנו.}$$

מסקנה 1.6 לכל $A \in M_n(\mathbb{C})$ מתקיים $f_A(A) = 0$, כאשר f_A הפולינום האופייני של A .

הוכחה: אם $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ אזי

$$f_A(A) = (A - \lambda_1 I) \dots (A - \lambda_n I) = 0$$

כעת נכתוב $f_A(x) = \sum a_i(A) \cdot x^i$, וכעת $a_i(A)$ פונקציות רציפות - פולינומים בכניסות המטריצה. לכן, $f_A(A) = \sum a_i(A) A^i$, גם כן רציפה. ניקח $B_n \rightarrow A$ כאשר B_n לכסינה לכל n , ולכן

$$0 = f_{B_n}(B_n) \rightarrow f_A(A)$$

■

ולכן סיימנו.