

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

2 בנובמבר 2016

בתרגול הזה נפתור תרגילים שונים על החומר של חדו"א 2, לשם חזרה ומעבר. הדבר העיקרי בו נדון בקורס הוא המרחב $\mathbb{R}^n$. במרחב הזה יש לנו את הנורמה האוקלידית:

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

נורמה זו מקיימת את תכונות הנורמה ובפרט את אי שוויון המשולש:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

כתיבה אלטרנטיבית שמדגישה מרחק:

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$$

הגדרה 0.1 סדרה $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ מתכנסת לגבול x אם מתקיים:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}. \forall n > N \quad |x_n - x| < \varepsilon$$

הגדרה 0.2 בהנתן $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, נגיד שהיא מתכנסת לגבול y בנקודה x_0 , ולסמן

$$y = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

אם מתקיים

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0. |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$$

הגדרה 0.3 רציפה בנקודה x_0 אם מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

טענה 0.4 רציפה בנקודה x_0 אם ורק אם לכל סדרה x_n המקיימת $x_n \rightarrow x_0$ מתקיים $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

זו טענה פשוטה יחסית שהוכחנו בקורסי עבר.

תרגיל תהי $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ שקבועה על קרנות, כלומר קיימת $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π מחזורית, עבורה מתקיים

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = h(\theta)$$

נניח כי h רציפה. הראו כי קיים הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

אם ורק אם h היא פונקציה קבועה.

פתרון נניח כי h קבועה. נובע כי f קבועה, ולכן וודאי שהגבול קיים, ושווה לאותו קבוע. כעת נניח כי הגבול קיים, ונסמנו L . ניקח סדרה $\{x_n\}$ על קרן עם ארגומנט θ , כך שמתקיים $x_n \rightarrow 0$. כעת מתקיים

$$L \xleftarrow{n \rightarrow \infty} f(x_n) = h(\theta)$$

ולכן לכל θ מתקיים $h(\theta) = L$.

0.1 הטופולוגיה של $\mathbb{R}^n$

הגדרה 0.5 קבוצה $U \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת פתוחה אם לכל $x \in U$ קיים $r > 0$ המקיים

$$B_r(x) := \{y \mid |y - x| < r\} \subseteq U$$

הגדרה 0.6 קבוצה $F \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת סגורה אם $\mathbb{R}^n \setminus F$ היא פתוחה. באופן שקול, לכל סדרה $\{x_n\} \in F$ שמתכנסת לגבול כלשהו x , מתקיים $x \in F$.

תזכורת $\{x_m\} = \left\{ \left(x_m^{(1)}, \dots, x_m^{(n)} \right) \right\}$ מתכנסת לגבול $x = \left(x^{(1)}, \dots, x^{(n)} \right)$ אם ורק אם לכל i מתקיים

$$x_n^{(i)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^{(i)}$$

תרגיל תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה סגורה, ותהי $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ העתקה רציפה. הראו שהגרף

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$$

הוא קבוצה סגורה.

פתרון תהא Γ_f סדרה שמתכנסת לנקודה (x, y) . אזי גם x_n מתכנסת לנקודה x , ומשום שנתון כי E סגורה נקבל כי $x \in E$. כיוון שהפונקציה f רציפה, נקבל כי $f(x_n)$ מתכנסת לגבול $f(x)$. הנחנו כי $f(x_n)$ מתכנסת לגבול y , וכעת מיחידות הגבול, $(x, y) = (x, f(x)) \in \Gamma_f$.

תרגיל תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה. הראו כי ישנה $A \subseteq \mathbb{R}^m$ סגורה והעתקה רציפה $f : A \rightarrow U$ שהיא על.

כדי לפתור את התרגיל הזה ננצל למה, שתהיה בשיעורי הבית:

למה 0.7 ניתן להציג את U כאיחוד בן מניה של כדורים סגורים.

פתרון נכתוב

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

כאשר $B_n \subseteq U$ קבוצה סגורה. נגדיר

$$A := \bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i \times \{i\}) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

נראה כי A סגורה. תהי $\{x_m\} \subseteq A$ אזי

$$x_m^{(n+1)} \in \mathbb{N}$$

נניח כי $x_m \rightarrow x$ אזי בפרט $x_m^{(n+1)} \rightarrow x^{(n+1)}$ אבל אלה טבעיים, ולכן עבור m גדול מספיק, $x_m^{(n+1)} = k$ כאשר $k \in \mathbb{N}$ קבוע כלשהו. אזי, עבור m גדול מספיק,

$$(x_m^{(1)}, \dots, x_m^{(n)}) \in B_k$$

ולכן

$$(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in B_k$$

ולכן $x \in B_k \times \{k\} \subseteq A$

לבסוף, נביט $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ המוגדרת על ידי

$$f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$$

ברור לפי ההגדרה כי $f(A) = U$, וכמובן שלכל $x \in U$ שייך לכדור כלשהו, ואז יש נקודה בתוך A שתוביל אל x .