

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

17 בינואר 2017

הסתכלנו בקואורדינטות ספריות בעבר:

$$p : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$p(r, \varphi, \theta) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$$

הדטרמיננט של הדיפרנציאל, לשם החלפת המשתנים הוא $r^2 \sin \theta$.

הגדרה 0.1 בהינתן $E \subseteq \mathbb{R}^n$ מדידה ז'ורדן, מרכז המסה הוא

$$m_E = \frac{1}{\text{Vol}(E)} \left(\int_E x_1, \dots, \int_E x_n \right)$$

תרגיל חשבו את מרכז המסה של

$$E = \{a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2, z \geq 0\}$$

פתרון ראשית נחשב את הנפח:

$$\text{Vol}(E) = \frac{\text{Vol}(B(0, b)) - \text{Vol}(B(0, a))}{2} = \frac{2\pi(b^3 - a^3)}{3}$$

כעת,

$$\int_E z = \int_{\substack{B(0,b) \\ z \geq 0}} z - \int_{\substack{B(0,a) \\ z \geq 0}} z$$

נחשב:

$$\begin{aligned} \int_{\substack{B(0,b) \\ z \geq 0}} z &= \int_{\substack{0 \leq r \leq b \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}} r \cos \theta r^2 \sin \theta \, dr d\varphi d\theta = 2\pi \int_0^b r^3 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta \, d\theta = \\ &= \frac{\pi}{4} b^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta) \, d\theta = \frac{\pi}{8} b^4 \int_0^{\pi} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{\pi}{4} b^4 \end{aligned}$$

ולכן

$$\int_E z = \frac{\pi}{4} (b^4 - a^4)$$

כעת, אם נתבונן בהעתקה $(x, y, z) \rightarrow (-x, y, z)$, המקיימת

$$E_1 = \{(x, y, z) \in E \mid x \geq 0\} \rightarrow \{(x, y, z) \in E \mid x \leq 0\} = E_2$$

מתקיים

$$\int_E x = \int_{E_1} x + \int_{E_2} x = 0$$

אותו דבר תקף לגבי y . לכן

$$m_E = \left(0, 0, \frac{3}{8} \frac{b^4 - a^4}{b^3 - a^3}\right)$$

הגדרה 0.2 תהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Ω בעלת מיצוי ז'ורדן אם יש $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \dots$ כך שלכל i מתקיים $\Omega_i \in \mathcal{J}$ וכן

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$$

תהי $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ עם כמות זניחה של נקודות אי רציפות (כלומר, הצמצום שלה על כל קבוצה מדידה ז'ורדן אינטגרבילי). אם

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega_i} f = \int_{\Omega} f$$

קיים ולא תלוי במיצוי, אזי הוא האינטגרל הלא אמיתי של f .

ראינו בכיתה - אם פונקציה היא אי שלילית, אזי הגבול תמיד לא תלוי במיין, אבל יכול להיות ∞ .

תרגיל בדקו האם

$$\int_{B(0,1)} \log(x^2 + y^2) \, dx dy$$

מתכנס.

פתרון נמצא:

$$\Omega_k = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{k} \leq (x, y) \leq 1 \right\}$$

ואז

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} \log(x^2 + y^2) \, dx dy &= 2\pi \int_{\frac{1}{k}}^1 r \log(r^2) \, dr = 4\pi \int_{\frac{1}{k}}^1 r \log r \, dr = \\ &= 4\pi \int_{\frac{1}{k}}^1 \left(\left(\frac{r^2}{2} \log r \right)' - \frac{r}{2} \right) dr = \\ &= 2\pi (r^2 \log r) \Big|_{\frac{1}{k}}^1 - 2\pi \int_{\frac{1}{k}}^1 r \, dr = \\ &= 2\pi \frac{\log k}{k^2} - \pi \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) \rightarrow -\pi \end{aligned}$$

0.3 הגדרה

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} \, dt$$

בשיעורי הבית נראה שאם $p, q > 0$ מתקיים

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} \, dx = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

משפט 0.4 תהי $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ אי שלילית, עם B_φ (קבוצת נקודות אי רציפות) זניחה. יהיו $p_1, \dots, p_n > 0$ אזי

$$\int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + \dots + x_n \leq 1}} \varphi(x_1 + \dots + x_n) x_1^{p_1-1} \dots x_n^{p_n-1} dx_1 \dots dx_n = \\ = \frac{\Gamma(p_1) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \dots + p_n)} \int_0^1 \varphi(u) u^{p_1 + \dots + p_n - 1} du$$

הוכחה: המקרה הכללי בתרגול הבא. כעת נוכיח עבור $n = 2$. נבחר החלפת משתנים

$$\begin{pmatrix} x + y = u \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{v} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x = u(1-v) \\ y = uv \end{pmatrix}$$

נגזור:

$$\left| \begin{pmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{pmatrix} \right| = u \neq 0$$

ומתקיים

$$\{x, y > 0, x + y < 1\} \leftrightarrow \{0 < u, v < 1\}$$

כעת,

$$\int_{\substack{x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 < 1}} \varphi(x_1 + x_2) x_1^{p-1} x_2^{q-1} dx_1 dx_2 = \int_{[0,1]^2} \varphi(u) u^{p-1} (1-v)^{p-1} u^{q-1} v^{q-1} u du dv \\ = \int_0^1 v^{q-1} (1-v)^{p-1} dv \int_0^1 \varphi(u) u^{p+q-1} du = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \int_0^1 \varphi(u) u^{p+q-1} du$$

■

תרגיל חשבו את נפח הגוף D , שמוכל בכדור $\left\{x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$, ונמצא מעל החרוט $\left\{z = \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$.

פתרון נוכל לתרגם את התנאים להיות

$$r \cos \theta \geq \sqrt{r^2 \sin^2 \theta} = r \sin \theta \\ \cos \theta \geq \sin \theta \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ r \leq \cos \theta$$

ולכן נקבל

$$\begin{aligned}\text{Vol}(D) &= \int_{\substack{0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ r \leq \cos \theta}} r^2 \sin \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos \theta} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta = \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta r^3 \Big|_0^{\cos \theta} = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta \cos^3 \theta \, d\theta = \dots = \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$