

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

3 בינואר 2017

1 משפט פוביני

משפט 1.1 יהיו $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבות, $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית ולכל $x \in A$ נסמן $f_x(y) = f(x, y)$. תהא $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in A$ מתקיים $F(x) \in \left[\left(\int_B f_x \right)_*, \left(\int_B f_x \right)^* \right]$ אזי

$$\int_{A \times B} f = \int_A F$$

שימוש אם f רציפה בנוסף, או שלחלופין $f(x, \cdot), f(\cdot, y)$ אינטגרביליות, אזי

$$\int_{A \times B} f(x, y) \, dx \, dy = \int_B \left(\int_A f(x, y) \, dx \right) dy$$

תרגיל הוכיחו כי אם יש כדור B שחסום בגליל S , וקונוס C שחסום בו גם, אז מתקיים

$$\nu(S) : \nu(B) : \nu(C) = 3 : 2 : 1$$

פתרון עבור הקונוס, הגובה ירוץ בין 0 לבין h , ובכל גובה z הרדיוס הוא

$$r_z = r \left(1 - \frac{z}{h} \right)$$

ולכן מתקיים

$$\nu(C) = \int_0^h \pi r^2 \left(1 - \frac{z}{h} \right)^2 dz = \pi r^2 h \int_0^1 t^2 dt = \frac{\pi h r^2}{3}$$

עבור הספירה הגובה ירוץ בין r לבין $-r$, ובגובה z רדיוס החתך יהיה

$$r_z = \sqrt{r^2 - z^2}$$

ולכן

$$\nu(B) = \int_{-r}^r \pi(r^2 - z^2) \, dz = \frac{4}{3} \pi r^3$$

נציב $h = 2r$ ונקבל

$$\nu(S) : \nu(B) : \nu(C) = 2\pi r^3 : \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{2}{3}\pi r^3 = 3 : 2 : 1$$

תרגיל יהי $a > 0$. מהו הניפחו של הסימפלקס

$$E_a^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \dots + x_n \leq a\}$$

פתרון נוכיח באינדוקציה כי

$$E_a^n = \frac{a^n}{n!}$$

$$,T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$T(x) = \frac{1}{a}x$$

לפי הנלמד בכיתה מתקיים

$$\det T \int_{E_a^n} f = \int_{T(E_a^n)} f \circ T^{-1}$$

בוודאי $T(E_a^n) = E_1^n$ ולכן מספיק להניח כי $a = 1$.
 עבור $0 \leq x_1 \leq 1$, $(x_2, \dots, x_n)$ כלשהם. לכל x_1 אפשרי נסתכל על החתך. מהו החתך? הוא $E_{1-x_1}^{n-1}$. לכן

$$\begin{aligned} \nu(E_1^n) &= \int_{E_1^n} 1 = \int_0^1 \left(\int_{E_{1-x_1}^{n-1}} 1 \, dx_2 \dots dx_n \right) dx_1 = \\ &= \int_0^1 \frac{(1-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 t^{n-1} dt = \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

תרגיל יהי $p > 0$,

$$\frac{1}{\text{Vol}(\{x \mid |x| \leq 1\})} \int_{|x| \leq 1} |x|^p = ?$$

פתרון נסמן

$$\mathbb{R}^{n+1} \supseteq E = \{(x, z) \mid 0 \leq z \leq 1 - |x|^p\}$$

אזי בהכרח

$$\nu(E) = \int_{|x| \leq 1} (1 - |x|^p)$$

נשתמש במשפט פוביני. z יכול לנוע בין $0, 1$. בהינתן z שכזה, החתך מתואר על ידי $|x|^p \leq 1 - z$ או $|x| \leq (1 - z)^{\frac{1}{p}}$. כעת,

$$\nu(B_n(r)) = r^n \nu(B_n(1))$$

כעת

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \int_0^1 \left(\int_{|x| \leq (1-z)^{\frac{1}{p}}} 1 \, dx \right) dz = \int_0^1 \nu(B_n(1)) \cdot (1-z)^{\frac{n}{p}} \, dz = \nu(B_n(1)) \int_0^1 (1-z)^{\frac{n}{p}} \, dz = \\ &= \nu(B_n(1)) \cdot \int_0^1 t^{\frac{n}{p}} = \nu(B_n(1)) \frac{1}{\frac{n}{p} + 1} = \nu(B_n(1)) \cdot \frac{p}{n+p} \end{aligned}$$

בסך הכל,

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq 1} (1 - |x|^p) &= \nu(B_n(1)) \cdot \frac{p}{n+p} = \nu(B_n(1)) - \int_{|x| \leq 1} |x|^p \\ \frac{n}{n+p} &= 1 - \frac{p}{n+p} = \frac{1}{\nu(B_n(1))} \int_{|x| \leq 1} |x|^p \end{aligned}$$

ולכן סיימנו.

תרגיל יהיו $0 < a < b$. חשבו את

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} \, dx$$

פתרון נביט בפונקציה x^y על הקוביה $[0, 1] \times [a, b]$. מתקיים

$$\int_{[0,1] \times [a,b]} x^y \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y \, dy \right) \, dx = \int_0^1 \frac{x^y}{\log x} \Big|_a^b \, dx = I$$

וכמו כן

$$\int_{[0,1] \times [a,b]} x^y \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y \, dx \right) \, dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} \, dy = \log \left(\frac{b+1}{a+1} \right)$$

וסיימנו.