

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

29 בנובמבר 2016

נתקן משהו מהוכחת האי שוויון האיזופרמטרי מהשיעור הקודם. ראינו

$$A = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$$

ורצינו לגזור. נגדיר

$$g(p, x, y, z) = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$$

וזהו A רק כאשר $p = \frac{x+y+z}{2}$. לכן

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial p} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g}{\partial p} + \frac{A}{2(p-x)}$$

בדומה עבור y, z , ומשם ממשיכים כמו אז.

1 כופלי לגראנז'

ניזכר במשפט.

משפט 1.1 תהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$, ויהיו $g_1, \dots, g_k$ פונקציות $C^1(U, \mathbb{R})$ (האילווצים), ונניח כי $Dg_1, \dots, Dg_k$ בלתי תלויים לינארית בנקודה x_0 .
תהי $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ פונקציית המטרה. אזי אם $x_0 \in U, g_i(x_0) = 0$ נקודת מינימום או מקסימום של f תחת האילווצים, מתקיים

$$D_{x_0} f = \sum_{i=1}^k \lambda_i D_{x_0} g_i$$

עבור λ_i כלשהם.

הוכחה: בשלילה. נניח כי המשפט לא מתקיים, כלומר $D_{x_0}f, D_{x_0}g_1, \dots, D_{x_0}g_k$ בלתי תלויים לינארית. נגדיר

$$F: U \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_k(x) \\ f(x) \end{pmatrix}$$

אזי מתקיים

$$D_{x_0}F = \begin{pmatrix} D_{x_0}g_1 \\ D_{x_0}g_2 \\ \vdots \\ D_{x_0}f \end{pmatrix}_{(k+1) \times n}$$

בנקודה x_0 כל אלה בלתי תלויים, מההנחה, ולכן $\text{rk} D_{x_0}F = k+1$, מדרגה מקסימלית - לכן לפי משפט הפונקציה הפתוחה, העתקה פתוחה בנקודה x_0 , כלומר לכל סביבה פתוחה U_{x_0} , התמונה שלה $F(U_{x_0})$ היא סביבה של הנקודה $y = F(x_0)$. כמובן, מתקיים

$$F(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x_0) \end{pmatrix} = y_0$$

סביבה של y_0 מכילה בפרט נקודות מהצורה

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x_0) + t \end{pmatrix}, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

כיוון שהמשתנה t יכול להיות שלילי או חיובי, נקבל שבתמונה של F על סביבה של x_0 תמיד יהיו נקודות שהערך בהן של f גדול מאשר $f(x_0)$, ותמיד יהיו נקודות שהערך בהן קטן מאשר $f(x_0)$ - ולכן x_0 לא יכולה להיות מינימום או מקסימום תחת האילוצים, בסתירה. ■

2 קואורדינטות מקומיות

הגדרה 2.1 נניח שיש לנו נקודה x_0 במרחב $\mathbb{R}^n$, שנשמך את הקואורדינטות בו $(x^1, \dots, x^n)$. נניח כי יש לנו דיפאומורפיזם (העתקה גזירה ברציפות שההופכית שלה גזירה ברציפות) מסביבה כלשהי בעותק אחר של $\mathbb{R}^n$, שבו הקואורדינטות הן $(u^1, \dots, u^n)$, לסביבה של x_0 . במצב זה אומרים כי $(u^1, \dots, u^n)$ הן קואורדינטות מקומיות של $\mathbb{R}^n$.

דוגמאות ראינו כבר שתיים - קואורדינטות קוטביות של $\mathbb{R}^2$, וספריות של $\mathbb{R}^3$.

במקרה שמתואר בהגדרה, נדון בדיפרנציאל של F . מתקיים כמובן

$$DF = \left(\frac{\partial F}{\partial u^1} \quad \dots \quad \frac{\partial F}{\partial u^n} \right)$$

מטריצה זו נקראת המטריצה של המטריקה הרימאנית.

זו מטריצה הפיכה, כי F דיפאומורפיזם - לכן העמודות האלה הן בלתי תלויות לינארית. כל אחת מהעמודות מייצגת את השינוי של F כאשר הנקודה משתנה רק בקואורדינטה זו - בתמונה, זה יהיה קו עקום, והעמודה תהיה הווקטור המשיק לה בנקודה המסויימת. למעשה, בעותק המקור של $\mathbb{R}^n$, הקואורדינטות $(u^1, \dots, u^n)$ מאונכות, ומועתקות לעותק השני למסילות כלשהן, לא דווקא קווים ישרים - הנגזרות החלקיות הן המשיקים למסילות הללו.

דוגמא בקואורדינטות קוטביות - אם נרץ את r , והזווית φ לא תזוז, נקבל קווים ישרים שעוברים בראשית. אם נרץ את φ ולא את r , נקבל מעגלים סביב הראשית. לכן הנגזרת לפי r היא קו ישר שעובר דרך הראשית, והנגזרת לפי φ משיקה למעגל המתאים בנקודה המתאימה.

כמובן, הווקטורים $\frac{\partial F}{\partial u^i}$ הם בסיס, ואז ניתן לדבר על הקואורדינטות של ווקטור ξ לפי הבסיס הזה. נגדיר מטריצה

$$\begin{aligned} G(u) &= (g_{ij}(u)) \\ g_{ij}(u) &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u) \right\rangle \end{aligned}$$

זו נקראת מטריצת גרס. מתקיים

$$G = (DF)^T DF$$

דוגמא בקואורדינטות קוטביות:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} &= (\cos \varphi, \sin \varphi) \\ \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= (-r \sin \varphi, r \cos \varphi) \\ G(u) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

המטריצה G שימושית לחישובי נורמה, למשל:

$$|\xi| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle} = \sqrt{\left\langle \sum_i \xi_i \frac{\partial F}{\partial u_i}, \sum_j \xi_j \frac{\partial F}{\partial u_j} \right\rangle} = \sqrt{\sum_{i,j} \xi_i \xi_j g_{ij}(u)}$$

כמו כן מתקיים

$$\det G = (\det DF)^2$$

הגדרה 2.2 ייקראו אורתוגונליות אם $g_{ij} = 0$ לכל $i \neq j$

3 משפט הדרגה הקבועה

משפט 3.1 תהי

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

כאשר $f(x_0) = y_0$. נניח כי $f \in C^1$. נניח כי $\text{rk} D_x f = k$ לכל x בסביבה מסויימת של x_0 . אזי קיימים דיפאומורפיזמים

$$\begin{aligned} \varphi : U_{x_0} &\rightarrow U_0 \\ \psi : V_{y_0} &\rightarrow V_0 \end{aligned}$$

$U_{x_0} \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה של x_0 , $V_{y_0} \subseteq \mathbb{R}^m$ סביבה של y_0 , $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה של הראשית, וכן $V_0 \subseteq \mathbb{R}^m$ עבורם מתקיים

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(u^1, \dots, u^n) = (u^1, \dots, u^k, 0, \dots, 0)$$

הוכחה: נסמן $x = (x_1, \dots, x_n) = (x', x'')$ כאשר $x' = (x_1, \dots, x_k)$, $x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n)$. באותה צורה נכתוב $y = (y_1, \dots, y_m) = (y', y'')$ כאשר $y' = (y_1, \dots, y_k)$ הוא k הקואורדינטות הראשונות. בלי הגבלת הכלליות, ניתן להניח כי המינור הבסיסי השמאלי העליון של Df הוא הפיך (אחרת נחליף בין הקואורדינטות, ונוכל והחליף חזרה בדיפאומורפיזמים). לכן למעשה מתקיים

$$f(x', x'') = (Q(x', x''), R(x', x''))$$

כאשר $Q(x', x'') \in \mathbb{R}^k$, $R(x', x'') \in \mathbb{R}^{m-k}$ והמינור הפיך משמע

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x'} \\ \frac{\partial R}{\partial x'} \end{pmatrix} \neq 0$$

כי הדיפרנציאל נראה כך:

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x'} & \frac{\partial Q}{\partial x''} \\ \frac{\partial R}{\partial x'} & \frac{\partial R}{\partial x''} \end{pmatrix}$$

כעת נגדיר

$$\varphi(x', x'') = (Q(x', x'') - y'_0, x'' - x'_0)$$

ומתקיים

$$D\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x'} & * \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

לכן $D_{x_0}\varphi$ מטריצה הפיכה, ולכן ממשפט הפונקציה ההפוכה φ הוא דיפאומורפיזם בין סביבה U_{x_0} לסביבה U_0 (נשים לב כי $\varphi(x_0) = 0$).
נסמן כעת

$$\varphi^{-1}(u', u'') = (A(u', u''), B(u', u''))$$

כאשר $A(u', u'') \in \mathbb{R}^k, B(u', u'') \in \mathbb{R}^{n-k}$ כמובן מתקיים

$$\begin{aligned} \varphi \circ \varphi^{-1} &= \text{Id} \\ \varphi(A(u', u''), B(u', u'')) &= (u', u'') \\ (Q(A(u', u''), B(u', u'')) - y'_0, B(u', u'') - x'_0) &= (u', u'') \end{aligned}$$

לכן נקבל כי

$$\begin{aligned} B(u', u'') &= x'_0 + u'' \\ Q(A(u', u''), B(u', u'')) &= y'_0 + u' \end{aligned}$$

נחשב ונקבל

$$\begin{aligned} f \circ \varphi^{-1}(u', u'') &= f(A(u', u''), x'_0 + u'') = \\ &= (Q(A(u', u''), x'_0 + u''), R(A(u', u''), x'_0 + u'')) = \\ &= (y'_0 + u', \tilde{R}(u', u'')) \end{aligned}$$

כאשר $\tilde{R}$ מסומן לפי מה שהופיע בקואורדינטה השנייה.
כעת נחשב את דרגת הדיפרנציאל של $f \circ \varphi^{-1}$. מצד אחד, הדיפרנציאל של f בעל דרגה k , והדיפרנציאל של φ^{-1} הפיך, כי φ^{-1} דיפאומורפיזם, ולכן גם הדיפרנציאל של $f \circ \varphi^{-1}$ הוא מדרגה k (כפל במטריצה הפיכה לא משנה דרגה). מצד שני, לפי הנוסחה שלמעלה, מקבלים

$$D(f \circ \varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ * & \frac{\partial \tilde{R}}{\partial u''} \end{pmatrix}$$

המטריצה Id בפינה השמאלית העליונה היא ממימד k , ולכן אם $\frac{\partial \tilde{R}}{\partial u''}$ אינו 0, נקבל דרגה שגדולה מאשר k - ולכן $\frac{\partial \tilde{R}}{\partial u''} = 0$, ולכן $\tilde{R}$ לא תלוי בערך של u'' (לא תמיד נכון, אבל נניח עם עובדים על תחום קמור - כדור או משהו כזה - אז כן). קיבלנו

$$f \circ \varphi^{-1}(u', u'') = (y'_0 + u', \tilde{R}(u'))$$

נגדיר

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \psi(y', y'') &= (y' - y'_0, y'' - \tilde{R}(y' - y'_0)) \end{aligned}$$

ψ דיפאומורפיזם - אפשר לבדוק בשתי דרכים: לחשב את הדיפרנציאל ולראות שהוא הפיך, או לחילופין למצוא את ההעתקה ההופכית ולראות שהיא גזירה ברציפות:

$$\begin{aligned} (y' - y'_0, y'' - \tilde{R}(y' - y'_0)) &= (z', z'') \\ y' &= z' + y'_0 \\ y'' &= z'' + \tilde{R}(y' - y'_0) = z'' + \tilde{R}(z') \end{aligned}$$

תרגיל - להוכיח את הפיכות הדיפרנציאל של ψ . כעת, נחשב ונשים לב כי

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(u', u'') = \psi(y'_0 + u', \tilde{R}(u')) = (u', 0)$$

■

כמו שרצינו.

מסקנה 3.2 נניח כי $k = m$ בתנאי המשפט (כאשר $m \geq n$). אזי

$$\psi f \varphi^{-1}(u^1, \dots, u^n) = (u^1, \dots, u^m)$$

זו היא העתקה פתוחה - ולכן משפט הפונקציה הפתוחה נובע מכאן למעשה.