

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

25 בנובמבר 2016

1 שלל אי שוויונים

1.1 תזכורת - אי שוויון יאנג

ניזכר באי שוויון יאנג: כאשר $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, לכל $a, b \geq 0$, מתקיים

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

השוויון מתקיים אם ורק אם $a^p = b^q$.
נמשיך עם עוד אי שוויונים מרתקים ללא ספק.

1.2 אי שוויון הלדר

יהיו $x, y \in \mathbb{R}^n$. אזי עבור $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, מתקיים

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\|_p \|y\|_q = \left(\sum |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

כאשר $p = q = 2$, זהו אי שוויון קושי שוורץ. הוכחה: ניקח

$$a_i = \frac{|x_i|}{\|x\|_p}$$
$$b_i = \frac{|y_i|}{\|y\|_q}$$

כעת מאי שוויון יאנג:

$$a_i b_i \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$$

על ידי סכימה נקבל

$$\sum a_i b_i \leq \frac{1}{p} \frac{\sum |x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum |y_i|^q}{\|y\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

לכן קיבלנו

$$\begin{aligned}\sum \frac{|x_i|}{\|x\|_p} \frac{|y_i|}{\|y\|_q} &\leq 1 \\ \sum |x_i| |y_i| &\leq \|x\|_p \|y\|_q\end{aligned}$$

כלומר

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \sum x_i y_i \right| \leq \sum |x_i| |y_i| \leq 1$$

■

וסיימנו.

1.3 אי שוויון מינקובסקי

זהו למעשה אי שוויון המשולש עבור הנורמה $\|\cdot\|_p$. הוכחה:

$$\begin{aligned}\|x + y\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1} |x_i + y_i| \leq \\ &\leq \sum |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \\ &\leq \|x\|_p \left(\sum |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} + \|y\|_p \left(\sum |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

המעבר האחרון הוא משימוש באי שוויון הלדר פעמיים. כעת נשים לב שמתקיים

$$\begin{aligned}\frac{1}{q} + \frac{1}{p} &= 1 \\ \frac{1}{q} &= \frac{p-1}{p} \\ p &= (p-1)q \\ \frac{p}{q} &= p-1\end{aligned}$$

לכן נקבל

$$\begin{aligned}\|x + y\|_p^p &\leq \dots \leq \|x\|_p \|x + y\|_p^{\frac{p}{q}} + \|y\|_p \|x + y\|_p^{\frac{p}{q}} = \\ &= \left(\|x\|_p + \|y\|_p \right) \|x + y\|_p^{p-1}\end{aligned}$$

ובסך הכל, לאחר חלוקה,

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

■

1.4 אי שוויון איזופרימטרי

תהי γ מסילה סגורה ופשוטה שאורכה L , ויהי A השטח החסום על ידה. אזי מתקיים

$$4\pi A \leq L^2$$

אם המסילה היא מעגל. אם היא משולש מתקיים

$$12\sqrt{3}A \leq L^2$$

ושוויון אם ורק אם המשולש שווה צלעות. הוכחה: נסמן $p = \frac{L}{2}$. מהתיכון מתקיים

$$A = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$$

במשולש שאורכי צלעותיו הם x, y, z . נרצה למקסם את A כפונקציה של x, y, z , אבל יש אילוץ - חייב להתקיים $x + y + z = 2p$. באופן מסודר, נגדיר

$$A(x, y, z) = g(x, y, z)$$

תחום ההגדרה הוא

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z > 0, x + y > z, x + z > y, y + z > x \right\}$$

הדרישות הן בשביל אי שוויון המשולש. U היא קבוצה פתוחה. השפה ∂U מורכבת מנקודות בהן אחד מהאי שוויונים הוא שוויון. בכל אחד מהמקרים הללו יתקיים $g(\partial U) = 0$ (ברור אם $x = 0$ למשל, וכן אם $x = y + z$, כי אז זה קו). נשים לב שההגבלה $x + y + z = 2p$ משמעותית - עבור $h(x, y, z) = x + y + z$, נקבל כי $\bar{U} \cap h^{-1}(2p)$ היא קבוצה קומפקטית. כמו כן, g מתאפסת על השפה שלה, ולכן מובטח לנו מהתרגיל (משפט ווירשטראס) כי g מקבלת מקסימום בפנים של U . נסמן נקודה זו בתור $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. מתקיים כמובן $Dh = (1, 1, 1)$. כמו כן, נחשב ונקבל

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{1}{2A} \left(\frac{1}{2} (p-x)(p-y)(p-z) - p(p-y)(p-z) \right) = \\ &= \frac{1}{2A} \left(\frac{1}{2p} A^2 - \frac{A^2}{p-x} \right) = \frac{A}{2} \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p-x} \right) \end{aligned}$$

כמובן ששוויונות דומים נכונים עבור $\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}$. כעת, ממשפט האילוץ, חייב להתקיים

$$(1, 1, 1) = Dh = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}$$

ולכן חייב להתקיים

$$\begin{aligned}\frac{1}{2p} - \frac{1}{p-z} &= \frac{1}{2p} - \frac{1}{p-y} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{p-x} \\ p-z &= p-y = p-x \\ z &= y = x = \frac{L}{3}\end{aligned}$$

■

כנדרש!

כעת, עבור מטריצה A סימטרית, נגדיר $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle$. מהן נקודות הקיצון של f תחת האילוץ $g(x) = |x|^2 - 1 = 0$ (כלומר על ספירת היחידה)? מעניין! כל זאת ועוד - בשיעור הבא!