

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

22 בנובמבר 2016

1 משפט הפונקציה ההפוכה

הגדרה 1.1 תהי $f : U \rightarrow V$. נקראת דיפאומורפיזם אם $f \in C^1$ וכן קיימת $g : U \rightarrow V$ המקיימת $g \in C^1$ וכן $g = f^{-1}$.

משפט 1.2 תהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, ותהי $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ כך שמתקיים:

1. $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$.

2. קיימת $y_0 \in U$ כך שהדיפרנציאל $D_{y_0} f$ הוא טרנספורמציה לינארית הפיכה - כלומר המטריצה

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j} y_0 \right)_{i,j}$$

שנקראת מטריצת יעקובי של f , הוא היעקוביאן, היא הפיכה.

אזי קיימת סביבה של הנקודה y_0 , שנסמנה U_0 , וסביבה של $x_0 = f(y_0)$, שנסמנה V_0 , כך שהצמצום $f : U_0 \rightarrow V_0$ היא דיפאומורפיזם - ומתקיים

$$D_x f^{-1} = (D_{f^{-1}(x)} f)^{-1}$$

הוכחה: נוכיח בעזרת משפט הפונקציה הסתומה - נרצה "לפתור" את המשוואה

$$f(y) = x$$

נגדיר

$$F(x, y) = x - f(y)$$

בגלל שהנחנו $f \in C^1$, ברור כי גם $F \in C^1$. כמו כן, מתקיים

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -D_y f$$

הנקודה (x_0, y_0) מקיימת את המשוואה $F(x_0, y_0) = 0$, והמטריצה

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y} &= -D_y f \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= I\end{aligned}$$

הפיכה, ולכן מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה - כלומר קיימים $\varepsilon > 0, \delta > 0$ ופונקציה g גזירה ברציפות עבורם לכל $(x, y) \in B_{x_0, \delta} \times B_{y_0, \varepsilon}$ מתקיים $F(x, y) = 0 \iff g(x) = y$ כמו כן מתקיים

$$D_x g = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = (D_y f)^{-1}$$

כעת, נגדיר

$$\begin{aligned}V_0 &= B_{x_0, \delta} \\ U_0 &= g(B_{x_0, \delta}) = f^{-1}(B_{x_0, \delta})\end{aligned}$$

כמובן U_0 פתוחה כי f רציפה. קיבלנו פונקציה הופכית g על הסביבות, ומתקיים גם

$$D_x g = D_y f^{-1}$$

■

דוגמאות

1. נגדיר לכל $r > 0$:

$$f: \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

כעת מתקיים

$$\begin{aligned}Df &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \\ \det Df &= r > 0\end{aligned}$$

מתקיים כמובן $f(r, \varphi) = f(r, \varphi + 2\pi)$, ולכן f לא חד־חד־ערכית, אבל המשפט מבטיח לנו כי באופן מקומי, f היא דיפאומורפיזם.

2. נגדיר עבור $r > 0, \cos \theta \neq 0$

$$f: \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

כעת מתקיים

$$Df = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\det Df = \sin \theta \cdot r^2 (\sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi + \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi) + r \cos \theta \cdot r (\cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi) =$$

$$= r^2 \sin^2 \theta \cos \theta + r^2 \cos^3 \theta = r^2 \cos \theta \neq 0$$

לכן מהמשפט, באופן מקומי, f היא דיפאומורפיזם.

הערה 1.3 אם f מקיימת את תנאי משפט הפונקציה ההפוכה, מקבלים כי אם W סביבה פתוחה של x_0 , אזי גם $f(W)$ פתוחה.

2 משפט הפונקציה הפתוחה

הגדרה 2.1 תהי $f : X \rightarrow Y$.

1. f נקראת העתקה פתוחה אם לכל $U \subseteq X$ פתוחה הקבוצה $f(U) \subseteq Y$ פתוחה.
2. f נקראת פתוחה בנקודה x_0 אם לכל סביבה פתוחה U של x_0 הקבוצה $f(U)$ היא סביבה של $f(x_0)$.

תרגיל אם $f : X \rightarrow Y$, אזי f פתוחה אם ורק אם f פתוחה בכל נקודה $x_0 \in X$.

תרגיל $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מונטונית ורציפה. האם f פתוחה? האם כל f פתוחה היא כזאת?

מסקנה 2.2 אם f מקיימת את משפט הפונקציה ההפוכה, אזי $f : U_0 \rightarrow V_0$, הצמצום שמדובר עליו במשפט, היא העתקה פתוחה.

משפט 2.3 (משפט הפונקציה הפתוחה) תהי $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ פתוחה, ותהי $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ גזירה ברציפות. נניח כי $D_{(x_0, y_0)} F : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ טרספורמציה לינארית מדרגה מקסימלית (כלומר על). אזי F פתוחה בנקודה (x_0, y_0) .

הוכחה:

$$D_{(x_0, y_0)} F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} (x_0, y_0)$$

קיים מינור כלשהו של המטריצה בגודל $m \times m$ בעל דטרמיננטה שאינה 0. בלי הגבלת הכלליות נוכל להניח כי המינור הזה הוא $-\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ - כלומר זהו מינור הפיך. כעת, נגדיר פונקציה

$$f(y) = F(x_0, y)$$

כמובן מתקיים

$$D_{y_0} f = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$$

וזו העתקה לינארית הפיכה. לכן f מקיימת את תנאי משפט הפונקציה ההפוכה. אם כן, f היא העתקה פתוחה בנקודה y_0 . צריך לבדוק כי F פתוחה בנקודה (x_0, y_0) . תהי U_0 סביבה פתוחה של (x_0, y_0) . נגדיר

$$\hat{U}_0 = U_0 \cap \{x = x_0\}$$

זוהי סביבה פתוחה של y_0 במרחב $\{x = x_0\}$. לפי מסקנה שראינו, $f(\hat{U}_0)$ מכילה סביבה של $F(x_0, y_0) = f(y_0)$ בנוסף מתקיים

$$F(U_0) \supseteq F(\hat{U}_0) = f(\hat{U}_0)$$

ולכן F פתוחה. ■

מסקנה 2.4 אם ידוע כי $D_{(x,y)} F$ בעל דרגה מקסימלית לכל (x, y) , אזי F העתקה פתוחה.

3 נקודות קיצון תחת אילוצים

נניח כי נתונות $g_1, \dots, g_k \in C^1(U, \mathbb{R})$ ופונקציית מטרה f . אנחנו נרצה למצוא מקסימום או מינימום מקומי של f בין כל הנקודות המקיימות

$$S = \begin{cases} g_1(x) = 0 \\ \vdots \\ g_k(x) = 0 \end{cases}$$

הגדרה 3.1 בעלת מקסימום מקומי בנקודה $x_0 \in S$ אם לכל x בסביבה פתוחה מסויימת של U של x_0 עבורו מתקיים $x \in U \cap S$, מתקיים

$$f(x) \leq f(x_0)$$

3.1 כופלי לגראנז'

משפט 3.2 יהיו $f, g_1, \dots, g_k \in C^1(U, \mathbb{R})$. נניח כי $x_0 \in S = \{x \mid \forall 1 \leq i \leq k \ g_i(x) = 0\}$ ונניח כי $\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_k(x_0)$ הם בלתי תלויים לינארית. אם לפונקציה יש מקסימום או מינימום מקומי בנקודה x_0 אזי

$$D_{x_0} f = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(x_0)$$

והמקדמים λ_i נקראים כופלי לגראנז'.

את ההוכחה נראה בשיעור הבא.

דוגמא אי שוויון יאנג: יהיו $a \geq 0, b \geq 0$ ויהיו $1 < p, q < \infty$ כך שמתקיים $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. אזי מתקיים $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ והשוויון מתקיים אם ורק אם $a^p = b^q$. נגדיר $f(a, b) = ab$ ואת האילוץ $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = c$. בקצוות נקבל $f = 0$, ולכן יש בתחום מקסימום מקומי. כעת, $Df = (b, a)$, $Dg = (a^{p-1}, b^{q-1})$, ונקבל לפי המשפט כי $a^p = b^q$.