

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

25 בנובמבר 2016

1 משפט הפונקציה הסתומה - המשך

בהרצאה הקודמת עבדנו על הוכחת משפט הפונקציה הסתומה. נשאר להראות כי הפונקציה הסתומה f מקיימת $f \in C^1(B_{x_0, \delta}, \mathbb{R}^m)$. בשביל זה עוד יש להראות שהיא גזירה, וכמסקנה מכך נקבל

$$D_x f = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))$$

עד כה בחרנו ε, δ כך שמתקיים

$$\left\| I - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, f(x_0)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right\| < \dots \leq q < 1$$

סימנו

$$M = \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, f(x_0)) \right)^{-1}$$

וכעת נסמן גם

$$\begin{aligned} Y &= \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \\ X &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \end{aligned}$$

כעת, נקבל כי MY הפיכה, לפי הלמה הבאה:

למה 1.1 תהי A מטריצה כך שמתקיים $\|I - A\| < 1$. אזי A הפיכה.

הוכחה: נוכיח בשתי דרכים.

דרך 1: ניסוח שקול ללמה: אם $\|B\| < 1$ אזי $I - B$ הפיכה (שקול ללמה על ידי ההצבה $A = I - B$). כעת נניח בשלילה כי $I - B$ אינה הפיכה, כלומר קיים $\xi \neq 0$ עבורו מתקיים

$$\begin{aligned} (I - B)\xi &= 0 \\ \xi &= B\xi \end{aligned}$$

נבחר ξ עם $\|\xi\| = 1$ על ידי נרמול, ונקבל

$$\|B\| = \max_{\|x\|=1} |Bx| \geq |I\xi| = \|\xi\| = 1$$

בסתירה להנחה. לכן $I - B$ הפיכה.
 דרך 2: נציג מפורשות את ההופכית. היינו רוצים לומר שההופכית היא סכום הטור האינסופי של המטריות:

$$\sum_{i=0}^{\infty} B^i$$

אבל יש להוכיח שסכום זה מתכנס קודם, על ידי מבחן קושי. ואכן

$$\|B^m + \dots + B^{m+p}\| \leq \|B^m\| + \dots + \|B^{m+p}\| \leq \|B\|^m + \dots + \|B\|^{m+p} < \varepsilon$$

אי השוויון הראשון הוא מאי שוויון המשולש, השני הוא מתת כפליות הנורמה, והשלישי הוא משום שכבר מדובר בטור הנדסי מתכנס של מספרים ($\|B\| < 1$). נותר רק לבדוק שהמטריצה

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} B^i$$

היא אכן ההופכית של $I - B$, ואכן ברור מפתיחת הסוגריים

$$(I - B)A = I$$

■

מהלמה MY הפיכה, וגם M הפיכה.
 כעת נשוב להוכחת המשפט.

הוכחה: נרצה להוכיח שהפונקציה הסתומה f דיפרנציאבילית בנקודה x_1 . נסמן $y = f(x_1)$. נרצה להראות שהדיפרנציאל הוא

$$L = -Y^{-1}X$$

כשאת Y, X הגדרנו קודם. מתקיים

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_1) - L(x - x_1)| &= |f(x) - f(x_1) + Y^{-1}X(x - x_1)| = \\ &= |Y^{-1}(Y(f(x) - f(x_1)) + X(x - x_1))| = \\ &= |Y^{-1}(-Y(f(x) - f(x_1)) - X(x - x_1))| = \\ &= |Y^{-1}(F(x, f(x)) - F(x_1, f(x_1)) - Y(f(x) - f(x_1)) - X(x - x_1))| \end{aligned}$$

המעבר האחרון היה חוקי משום שמתקיים $F(x, f(x)) = F(x_1, f(x_1)) = 0$ שכן
כך הוגדרה הפונקציה הסתומה בסביבה. כעת, כיוון שנתון כי F גזירה בנקודה (x_0, y_0)
מתקיים

$$F(x, y) - F(x_1, y_1) - D_{(x_1, y_1)} F \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix}_{m+n} = (|x - x_1| + |y - y_1|) \cdot \alpha(x, y)$$

כאשר $\alpha(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_1, y_1)} 0$ וכן

$$D_{(x, y)} F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix}_{m \times m+n}$$

לכן נקבל כי

$$F(x, y) - F(x_1, y_1) - D_{(x_1, y_1)} F \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix}_{m+n} = F(x, y) - F(x_1, y_1) - X(x - x_1) - Y(y - y_1)$$

ובסך הכל, אם נחזור לחישוב הקודם,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_1) - L(x - x_1)| &= \dots = \\ &= |Y^{-1}(F(x, f(x)) - F(x_1, f(x_1))) - Y(f(x) - f(x_1)) - X(x - x_1)| \leq \\ &\leq \|Y^{-1}\| |F(x, f(x)) - F(x_1, f(x_1)) - Y(f(x) - f(x_1)) - X(x - x_1)| = \\ &= \|Y^{-1}\| (|x - x_1| + |f(x) - f(x_1)|) \alpha(x, f(x)) \end{aligned}$$

כאשר שוב $\alpha(x, f(x)) \xrightarrow{(x, f(x)) \rightarrow (x_1, f(x_1))} 0$ ניחא a כלשהו עבורו

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_1)| &\leq |f(x) - f(x_1) - L(x - x_1)| + |L(x - x_1)| \leq \\ &\leq |f(x) - f(x_1) - L(x - x_1)| + a|x - x_1| \end{aligned}$$

נציב זאת בחישוב הקודם, ונקבל בסך הכל:

$$|f(x) - f(x_1) - L(x - x_1)| \leq b(|x - x_1| + |f(x) - f(x_1) - L(x - x_1)| + a|x - x_1|) \alpha(x, f(x))$$

על ידי העברת אגפים וחילוק נקבל

$$|f(x) - f(x_1) - L(x - x_1)| \leq \frac{|x - x_1| \cdot b(a + 1) \cdot \alpha(x, f(x))}{1 - b \cdot \alpha(x, f(x))} \xrightarrow{x \rightarrow x_1} 0$$

ולכן f אכן דיפרנציאבילית. נותר רק לבדוק את רציפות הדיפרנציאל הזה. ראינו כבר
כי

$$D_x f = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))$$

נתון לנו כי $\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))$ רציף, וכי $\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))$ רציף. נותר רק להראות כי ההעתקה $A \rightarrow A^{-1}$ רציפה. למעשה היא גזירה אינסוף פעמים - מתקיים

$$A^{-1} = \frac{\hat{A}}{\det A}$$

כאשר $\det A$ היא פולינום בכניסות המטריצה, וכל כניסה במטריצה $\hat{A}$ היא דטרמיננטה של מינור של A , ולכן גם כן פולינום בכניסות A . ■