

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

15 בנובמבר 2016

ניזכר בניסוח של משפט הפונקציה הסתומה:

משפט 0.1 תהי $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, כאשר $U \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$. נסמן $F(z) = F(x, y)$, כאשר $x_1, \dots, x_m = z_1, \dots, z_m, y_1, \dots, y_n = z_{m+1}, \dots, z_{m+n}$. נכתוב את F לפי רכיבים: $F(F_1, \dots, F_m)$. נניח $F \in C(U)$, ונניח כי F גזירה לפי y בסביבה U , וכן כי $\frac{\partial F}{\partial y}$ תלוי באופן רציף בנקודה (x, y) (כלומר העתקת הדיפרנציאל לפי y היא פונקציה רציפה). בנוסף, נניח כי עבור (x_0, y_0) מתקיים $F(x_0, y_0) = 0$, וכי $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ היא טרנספורמציה לינארית הפיכה. אזי קיימים $\delta > 0, \varepsilon > 0$ ופונקציה $f : B_{x_0, \delta} \rightarrow B_{y_0, \varepsilon}$ כך שמתקיים $F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$ מתקיים $x \in B_{x_0, \delta}, y \in B_{y_0, \varepsilon}$, וכן לכל $B_{x_0, \delta} \times B_{y_0, \varepsilon} \subseteq U$. כמו כן, $f(x_0) = y_0$.

דוגמה נגדיר

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

במצב זה מתקיימים תנאי המשפט, והפונקציה היא $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$, בהתאם לנקודה (לפי הסימן של y_0).

אנחנו הולכים להוכיח את המשפט בשיטה של העתקות כיווץ.

הגדרה 0.2 יהי (X, d) מרחב מטרי שלם. T היא העתקה מכווצת אם קיים $0 \leq \alpha \leq 1$ כך שלכל $x, y \in X$ מתקיים

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

בשיעור שעבר ראינו כי אם T העתקה מכווצת במרחב מטרי שלם, אזי קיימת ויחידה נקודת שבת x_* , כלומר $Tx_* = x_*$. בנוסף, כדי למצוא את נקודת השבת, ניתן לקחת נקודה x_0 כלשהי ולהגדיר

$$x_n = T^n x_0$$

זו תהיה סדרת קושי (קל לבדוק) ותשאף לנקודת השבת x_* , בבירור. כתרגיל - חסמו מלמעלה את $d(x_n, x_*)$ כפונקציה של α , מקדם הכיווץ, והמרחק המקורי $d(x_*, x_0)$.

כעת נוכיח את משפט הפונקציה הסתומה.

הוכחה: ראשית, נכתוב מחדש את המשוואה $F(x, y) = 0$ בצורה אחרת ושקולה. נסמן

$$M = \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1}, \text{ ונגדיר:}$$

$$A(x, y) := y - M(F(x, y))$$

כעת ברור כי

$$F(x, y) = 0 \iff A(x, y) = y$$

כעת נגזור את A לפי y :

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x, y) = \text{Id} - M \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = M \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right)$$

מכאן נקבל

$$\left\| \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) \right\| \leq \|M\| \cdot \left\| \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right\|$$

כעת, כיוון שהדיפרנציאל לפי y של F הוא רציף, אם נבחר $|x - x_0|, |y - y_0| \leq r$ נוכל לכתוב

$$\left\| \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) \right\| \leq \|M\| \cdot \left\| \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right\| \leq q(r)$$

עבור פונקציה q המקיימת

$$\lim_{r \rightarrow 0} q(r) = 0$$

למעשה ניתן לקחת

$$q(r) = \|M\| \cdot \sup_{\substack{|x-x_0| < r \\ |y-y_0| < r}} \left\| \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right\|$$

כמו כן, נוכל גם לכתוב, ממשפט ערך הביניים,

$$|A(x, y_1) - A(x, y_2)| \leq |y_1 - y_2| \sup_{y \in [y_1, y_2]} \left\| \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) \right\|$$

כעת, משילוב של אי השוויונות האחרונים, מתקיים

$$|A(x, y_1) - A(x, y_2)| \leq q(r) |y_1 - y_2|$$

לבסוף נשים לב גם כי

$$\begin{aligned} |A(x, y_0) - y_0| &= |y_0 - MF(x, y_0) - y_0| = |MF(x, y_0)| \stackrel{*}{\leq} \\ &\stackrel{*}{\leq} \|M\| |F(x, y_0) - F(x_0, y_0)| \leq p(r) \end{aligned}$$

אי השוויון שמשומן * נכון משום שנתון $F(x_0, y_0) = 0$, והפונקציה p מוגדרת

$$p(r) = \|M\| \cdot \sup_{|x-x_0| < r} |F(x, y_0) - F(x_0, y_0)|$$

ומרציפות F מתקיים

$$\lim_{r \rightarrow 0} p(r) = 0$$

כעת, עבור $|x - x_0| < r, |y_1 - y_0| < r$ מתקיים

$$|A(x, y_1) - y_0| \leq |A(x, y_1) - A(x, y_0)| + |A(x, y_0) - y_0|$$

כעת נפעיל את אי השוויונים שהוכחנו כבר על כל אחד מהגורמים, ונקבל

$$\begin{aligned} |A(x, y_1) - y_0| &\leq |A(x, y_1) - A(x, y_0)| + |A(x, y_0) - y_0| \leq \\ &\leq p(r) + q(r) |y_0 - y_1| \leq p(r) + r q(r) \end{aligned}$$

כעת, נבחר $\varepsilon > 0$ קטן מספיק כך שמתקיים $q(\varepsilon) < 1$. כמו כן, נבחר $0 < \delta \leq \varepsilon$ עבורו

$$\begin{aligned} p(\delta) + q \cdot \varepsilon &< \varepsilon \\ p(\delta) &< \varepsilon(1 - q) \end{aligned}$$

עבור בחירה זו של ε, δ , מתקיים ראשית שלכל $x \in \overline{B_{x_0, \delta}}$, ההעתקה $A(x, y)$ מקיימת $\mathbb{R}^m$, וכן היא העתקה מכווצת. הכדור $\overline{B_{y_0, \varepsilon}}$ הוא קבוצה סגורה בתוך $\mathbb{R}^m$, ולכן הוא מרחב מטרי שלם. לפי המשפט שראינו בשבוע שעבר, לכל $x \in \overline{B_{x_0, \delta}}$ קיימת ויחידה נקודת שבת $f(x) \in B_{y_0, \varepsilon}$, שעבורה

$$A(x, f(x)) = f(x)$$

וכמובן $F(x, f(x)) = 0$. נרצה להראות שפונקציה זו רציפה. נגדיר סדרת פונקציות על $\overline{B_{x_0, \delta}}$:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= y_0 \\ f_{n+1}(x) &= A(x, f_n(x)) \end{aligned}$$

בבירור, כל f_n היא רציפה, וכן יש התכנסות נקודתית $f_n \rightarrow f$. כמו כן, יש התכנסות במידה שווה:

$$\begin{aligned} |f(x) - f_{n+1}(x)| &= |A(x, f(x)) - A(x, f_n(x))| \leq q |f(x) - f_n(x)| \leq q^{n+1} |f(x) - f_0(x)| \leq \\ &\leq q^{n+1} |f(x) - y_0| \leq q^{n+1} \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

מחדו"א 2, פונקציות רציפות מתכנסות במידה שווה לפונקציה רציפה, ולכן f רציפה. ■

משפט 0.3 נניח את כל תנאי משפט הפונקציה הסתומה, ובנוסף גם כי $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ קיימת ורציפה (כלומר העתקת הדיפרנציאל לפי x רציפה). אזי הפונקציה הסתומה f גזירה ברציפות ומתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_1) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, f(x_1)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x_1, f(x_1))$$

הערה 0.4 הטענה המרכזית כאן היא על הגזירות ברציפות. הנוסחה נובעת מיישירה על ידי

$$F(x, f(x)) = 0$$

הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות, ולכן אם נוכיח כי f גזירה נוכל להפעיל את כלל השרשרת:

$$0 = \frac{\partial F(x, f(x))}{\partial x}(x_1) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_1, f(x_1)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_1, f(x_1)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_1)$$

דוגמא נחזור לדוגמא

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

ונסמן את הפונקציה הסתומה $y(x)$, אזי

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= 0 \\ x^2 + (y(x))^2 - 1 &= 0 \\ 2x + 2yy' &= 0 \\ 2 + 2y'^2 + 2yy'' &= 0 \end{aligned}$$

וכך ניתן להמשיך, כל עוד F גזירה.

מסקנה 0.5 אם F גזירה ברציפות k פעמים, אזי גם הפונקציה הסתומה f גזירה ברציפות k פעמים, ואת הנגזרות ניתן למצוא באופן רקורסיבי.