

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

17 בנובמבר 2016

בשיעור הקודם ראינו את משפט ערך הביניים שאומר את הדר הבא:

$$|F(a+h) - F(a)| \leq |h| \cdot \sup_{z \in (a, a+h)} \|D_z F\|$$

נתבונן במקרה הפרטי בו נציב $F - L$ עבור L לינארית כלשהי.

$$\begin{aligned} |F(a+h) - F(a) - L(a+h) + L(a)| &\leq |h| \sup_{z \in (a, a+h)} \|D_z F - L\| \\ |F(a+h) - F(a) - L(h)| &\leq |h| \sup_{z \in (a, a+h)} \|D_z F - L\| \end{aligned}$$

מסקנה 0.1 אם $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ גזירה בכל נקודה פרט לנקודה z_0 , וכן

$$\lim_{z \rightarrow z_0} D_z F = L$$

אזי F גזירה גם בנקודה z_0 ומתקיים $D_{z_0} F = L$.

כעת, תהי $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. בהינתן $a, b \in U$, תהי $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ מסילה גזירה ברציפות עברה $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$. אזי ממשפט ניוטון לייבניץ,

$$\begin{aligned} |F(a) - F(b)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt \right| = \left| \int_0^1 D_{\gamma(t)} F \cdot (\dot{\gamma}(t)) dt \right| \leq \int_0^1 |D_{\gamma(t)} F \cdot (\dot{\gamma}(t))| dt \leq \\ &\leq \int_0^1 \|D_{\gamma(t)} F\| |\dot{\gamma}(t)| dt \leq \sup_{z \in [0, 1]} \|D_{\gamma(z)} F\| \cdot \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt \end{aligned}$$

כאשר האינטגרל האחרון הוא למעשה אורך המסילה γ .
כעת נחזור למשפט הפונקציה הסתומה, שניסחנו בשיעור שעבר.
ניזכר כי $\mathbb{R}^{n^2} \cong M_n(\mathbb{R})$. נגדיר

$$f(A) = \det A$$

ראינו שזו העתקה רציפה וכן כי

$$D_A f(H) = \det A \cdot \operatorname{tr}(A^{-1}H)$$

ניזכר במטריצה המצורפת, $\det A \cdot A^{-1} = \hat{A}$, ונקבל

$$D_A f(H) = \operatorname{tr}(\hat{A}H)$$

כעת נתבונן בקבוצה

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$

הקבוצה $f(A) = 1$ היא משטח בתוך $\mathbb{R}^n$, וכן מקיימת את משפט הפונקציה הסתומה, לכן לכל A עבורה $\det A = 1$ מתקיים $D_A f \neq 0$, כלומר אחת הנגזרות החלקיות אינה 0. f היא פונקציה של כניסות המטריצה, כלומר n^2 משתנים. אם באופן מקומי, הנגזרת לפי האחרון אינה 0, אזי הקואורדינטה האחרונה תלוייה באחרות בסביבה הזו. בהוכחת משפט הפונקציה הסתומה ניעזר במשפט הבא:

משפט 0.2 יהי (X, d) מרחב מטרי שלם, כלומר מרחב מטרי שבו כל סדרת קושי מתכנסת. תהי $\varphi : X \rightarrow X$ העתקה מכווצת, כלומר שקיים קבוע $\alpha \in (0, 1)$ עבורו מתקיים $d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \alpha d(x, y)$. אזי קיימת יחידה נקודת שבת x_* , כלומר $\varphi(x_*) = x_*$.

דוגמאות מרחבים מטריים שלמים:

1. $\mathbb{R}^n$ לכל n .

2. $X = \{f : K \rightarrow \mathbb{R}\}$ כאשר f רציפה, K קומפקטית. המטריקה היא $d(f, g) = \max_{x \in K} |f(x) - g(x)|$.

תרגיל יהי (X, d) מרחב מטרי שלם. תהי $Z \subseteq X$ תת קבוצה סגורה. אזי (Z, d) מרחב מטרי שלם.