

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

8 בנובמבר 2016

1 משפטי ערך ביניים

משפט 1.1 יהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום, ותהי $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ דיפרנציאבילית. יהי $[a, b] \subseteq U$ קטע. אזי קיימת $c \in [a, b]$ עבורה

$$f(b) - f(a) = D_c f(b - a)$$

הוכחה: נרצה להעריך את $f(b) - f(a)$. נגדיר

$$\varphi(t) = f(a + t(b - a)), t \in [0, 1]$$

כעת φ גזירה בכל $[0, 1]$, ולכן ממשפט לגראנז' (חדו"א 1), ישנה $\xi \in [0, 1]$ עבורה

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi)$$

נחשב:

$$\varphi'(\xi) = D_{\varphi(\xi)} f(b - a)$$

■

באופן כללי מתקיים האי שוויון

$$|f(b) - f(a)| \leq \|D_z f\| |b - a|$$

לכל $z \in [a, b]$

הערה 1.2 אפשר להניח כי f גזירה רק על (a, b) , ורציפה על $[a, b]$.

הערה 1.3 המשפט לא מתקיים עבור פונקציה וקטורית (שתמונתה בתוך $\mathbb{R}^m$). למשל,

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \varepsilon t \end{pmatrix}$$

עבור $\varepsilon > 0$ כלשהו. כעת $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi\varepsilon \end{pmatrix}$, אבל הנגזרת בכל נקודה תהיה

מהצורה $\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \varepsilon \end{pmatrix}$, ולא ייתכן שגם $\sin$ וגם $\cos$ יתאפסו יחד.

סימון בהינתן מטריצה A מסדר $m \times n$, נגדיר את $R_i(A)$ להיות השורה מספר i של A , ואת $C_i(A)$ להיות העמודה מספר i של A .

הערה 1.4 נשים לב כי

$$\begin{aligned} \|A\| &\geq |R_i(A)| = \|R_i(A)\| \\ \|A\| &\geq |C_i(A)| = \|C_i(A)\| \end{aligned}$$

נשים לב כי עבור מטריצה A , מתקיים

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \sqrt{\lambda_{\max}(A A^T)} = \|A^T\|$$

כמו כן, אם נסמן $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, נקבל

$$|C_1(A)| = |Ax| \leq \|A\| \cdot |x|$$

כך נקבל לכל i כי מתקיים

$$|C_i(A)| \leq \|A\|$$

בנוסף מתקיים

$$|C_1(A)| = \|C_1(A)\|$$

למעשה, לכל ווקטור $\bar{a}$ מתקיים

$$\|\bar{a}\| = |a|$$

וזאת משום שמתקיים

$$\|\bar{a}\| = \max_{|x|=1} |t\bar{a}| = |\bar{a}|$$

משפט 1.5 יהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$, ותהי $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ רציפה על U . יהי $[a, b] \subseteq U$ קטע פתוח עבורו F גזירה על (a, b) . אזי

$$|F(b) - F(a)| \leq \sup_{(a,b)} \|Df\| \cdot |b - a|$$

הוכחה: די קל לקבל את האי שוויון עם קבוע $\sqrt{m}$ בצד הימני: נכתוב $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}$. נשתמש

באי השוויון שראינו לפונקציות סקלריות לכל רכיב בנפרד:

$$|F_i(a) - F_i(b)| \leq \sup_{(a,b)} \|DF_i\| |b - a| \leq \sup_{(a,b)} \|DF\| |b - a|$$

מכאן שמתקיים

$$|F(b) - F(a)| \leq \sqrt{m} \sup_{(a,b)} \|DF\| |b - a|$$

כעת נוכיח בלי הקבוע. נגדיר $G = R \circ F$, עבור R טרנספורמציה אורתוגונלית של $\mathbb{R}^m$ כך שהוקטור $R(F(a) - F(b))$ מאונך לציר y_1 . משמע

$$G(a) - G(b) \parallel \frac{\partial}{\partial y_1}$$

כאשר משמעות הסימון היא "מקביל". כעת, מכלל השרשרת,

$$DG = D(R \circ F) = R \circ DF$$

ומתקיים

$$\|DG\| = \|R \circ DF\|$$

אבל R אורתוגונלית, ולכן $\|RA\| = \|A\|$ לכל A לינארית. ההוכחה של זה - תרגיל. לכן

$$\|DG\| = \|DF\|$$

כעת, להעתקה G יש שוב m רכיבים. עבורם מתקיים

$$|G_1(a) - G_1(b)| \leq \sup_{(a,b)} \|DG_1\| |b - a| \leq \sup_{(a,b)} \|DG\| |b - a|$$

בכל שאר הרכיבים, מתקיים

$$0 = G_i(b) - G_i(a)$$

לכן מתקיים

$$|G(b) - G(a)| = |G_1(b) - G_2(a)| \leq \sup_{(a,b)} \|DG\| |b - a|$$

כעת נכתוב $G = R \circ F$, כלומר $F = R^{-1} \circ G$, ואז

$$|R(F(a) - F(b))| \leq \sup_{(a,b)} \|DG\| |b - a|$$

ומכאן נובע

$$|F(b) - F(a)| \leq \sup_{(a,b)} \|DF\| |b - a|$$

■

דוגמה ניזכר כי $\mathbb{R}^{n^2} \cong M_n(\mathbb{R})$, ונגדיר

$$F(A) = \det A$$

דטרמיננטה היא פולינום ברכיבים, ולכן F גזירה אינסוף פעמים. נרצה למצוא את DF בשלב ראשון, נחשב את הדיפרנציאל בנקודה $A_0 = I_n$. נוכל להוכיח כי

$$\det(I + tH) = \det A_0 = 1 + t \cdot \operatorname{tr} H + o(t)$$

ומכאן נקבל כי

$$(D_I \det)(H) = \operatorname{tr} H$$

נוכיח את הזהות. נסמן $-\lambda = \frac{1}{t}$.

$$\det(I + tH) = \det\left(t\left(\frac{1}{t}I + H\right)\right) = t^n \det(H - \lambda I)$$

ניזכר כי $\det(H - \lambda I)$ היא הפולינום האופייני של H , שנסמנו P_H . מאלגברה ידוע לנו כי המקדמים המובילים הם $\operatorname{tr} H$, $(-1)^n$, $(-1)^n$, והמקדם האחרון הוא $(-1)^n \det H$.

$$P_H = (-1)^n (\lambda^n - \operatorname{tr} H \lambda^{n-1} + \dots + \det H)$$

נקבל

$$\det(I + tH) = t^n (-1)^n \left(\left(-\frac{1}{t}\right)^n - \operatorname{tr} H \left(-\frac{1}{t}\right)^{n-1} + \dots + \det H \right) = 1 + t \cdot \operatorname{tr} H + o(t)$$

כעת, עבור A_0 אחרת, אם היא הפיכה, המצב עדיין טוב:

$$\begin{aligned}\det(A_0 + tH) &= \det(A_0(I + tA_0^{-1}H)) = \det A_0(1 + t \operatorname{tr}(A_0^{-1}H) + o(t)) = \\ &= \det A_0 + t \det A_0 \operatorname{tr}(A_0^{-1}H) + o(t)\end{aligned}$$

לכן, עבור A_0 הפיכה מתקיים

$$(D_{A_0} \det)(H) = \det A_0 \cdot \operatorname{tr}(A_0^{-1}H)$$

תרגיל

- מצאו את $D_I \det$ על ידי שימוש בכלל השרשרת.
- חשבו את $D_{A_0} \det$ עבור A_0 שאינה הפיכה? רמז: יש להשתמש במטריצה המצורפת $\hat{A} = \operatorname{adj} A$.

2 משפט הפונקציה הסתומה

2.1 מבוא

יהיו $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ ותהי $F : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ פונקציה. נרצה לפתור את המערכת $F(x, y) = 0$, שלה יש m משוואות עם $m+n$ נעלמים. נרצה לחלץ את המשתנים $y_1, \dots, y_m$ באופן כללי, אם A, B לינאריות, ונכתוב

$$Ax + By = 0$$

אזי אם B הפיכה, נוכל לכתוב

$$y = -B^{-1}Ax$$

דוגמה $m = 1, n = 1$. נתבונן במשוואה

$$F(x, y) = x^2 + y^2 = 1$$

המטרה היא, שוב, לחלץ את y , כלומר להציג את y כפונקציה של x . מסתבר שבסביבת כל נקודה שאינה $(\pm 1, 0)$ ניתן לעשות זאת. מה הבעיה בנקודות המיוחדות? נחשב את הדיפרנציאל:

$$DF = (2x, 2y)$$

הבעיה בנקודות היא שבהן מתקיים $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

משפט 2.1 תהי $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ רציפה בסביבה של הנקודה (x_0, y_0) , כאשר $x_0 \in \mathbb{R}^n, y_0 \in \mathbb{R}^m$, שגם מקיימת $F(x_0, y_0) = 0$. בנוסף נניח כי לכל x קבוע, הפונקציה F גזירה ברציפות לפי y , כלומר $D^{(y)}F$ היא טרנספורמציה לינארית שתלויה באופן רציף בנקודה (x, y) , וכן כי $D^{(y)}F$ הפיכה בנקודה (x_0, y_0) . אזי קיימים $\varepsilon, \delta > 0$ ופונקציה $f : B(x_0, \delta) \rightarrow B(y_0, \varepsilon)$ שמתקיימים התנאים הבאים:

1. f רציפה.

2. לכל $x \in B(x_0, \delta), y \in B(y_0, \varepsilon)$ מתקיים

$$F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$$

3. $f(x_0) = y_0$.