

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

5 בנובמבר 2016

בפעם שעברנו דיברנו על העתקות $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ועל הדיפרנציאל שלהן,

$$D_x F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

ניזכר שראינו שמתקיים

$$D_x F = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{i,j}$$

הגדרה 0.1 אוסף כל ההעתקות הגזירות מקבוצה U אל $\mathbb{R}^m$ שגזירות ברציפות מסומן $C^1(U, \mathbb{R}^m)$. כלומר, אלה כל ההעתקות F שגזירות לכל $x \in U$, ושהדיפרנציאל שלהן $D_x F$ תלוי באופן רציף בנקודה x .

משפט 0.2 צריך להיות מוכר מחדו"א 2: $F \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ אם ורק אם לכל i, j $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \in C(U, \mathbb{R}^m)$, כלומר הנגזרת החלקית j של הקואורדינטה i רציפה.

נדון בשני מקרים פרטיים של העתקות גזירות:

1. מסילות: $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, $I \subseteq \mathbb{R}$. ניתן לפרק את המסילה לרכיבים

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_m(t) \end{pmatrix}$$

וכעת את הדיפרנציאל נוכל לכתוב בתור

$$\dot{\gamma}(t_0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} (\gamma(t)) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t_0) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_m(t_0) \end{pmatrix}$$

ווקטור זה נקרא גם ווקטור המהירות של המסילה. המסילה נקראת רגולרית בנקודה t_0 אם מתקיים $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$.

2. העתקה גזירה $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $F \in (\mathbb{R}^n)^*$ ומתקיים

$$D_{x_0} F(h) = \frac{\partial F}{\partial x_1} h_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n} h_n$$

ניקח בסיס $e_1, \dots, e_n$ של $\mathbb{R}^n$ ואת $e'_1, \dots, e'_n$ הבסיס הדואלי של $(\mathbb{R}^n)^*$, וכעת לכל $h \in \mathbb{R}^n$ מתקיים כי $e'_i(h) = h_i$. לכן

$$D_{x_0} F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} e'_i$$

ומסמנים $e'_i = dx_i$ לכן כותבים

$$D_{x_0} F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i$$

הגדרה 0.3 בהינתן פונקציה $F : U \rightarrow \mathbb{R}$, נסמן את הגרדיאנט שלה, הווקטור ∇f , בתור הווקטור המקיים

$$DF(h) = \langle \nabla f, h \rangle$$

ראינו כבר כי במצב זה

$$D_{x_0} F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} h_i = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix}, h \right\rangle$$

ולכן הווקטור הזה הוא ∇f .

כלל השרשרת יהיו $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ פונקציות. נניח כי F גזירה בנקודה x_0 , וכי G גזירה בנקודה $y_0 = F(x_0)$. אזי $G \circ F$ גזירה בנקודה x_0 ונגזרתה:

$$\begin{aligned} D_{x_0} (G \circ F) &= D_{y_0} G \cdot D_{x_0} F \\ \frac{\partial (G \circ F)_i}{\partial x_j} &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial G_i}{\partial x_l}(y_0) \cdot \frac{\partial F_l}{\partial x_j}(x_0) \end{aligned}$$

מסקנה 0.4 פונקציה $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ היא גזירה בנקודה x_0 אם ורק אם כל רכיב F_i של הפונקציה הוא גזיר בנקודה x_0 . מתקיים

$$F_i = p_i \circ F$$

כאשר p_i ההטלה על הקואורדינטה i .

מסקנה 0.5 עבור $F, G : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ גזירות,

$$D(\langle F, G \rangle) = G^T DF + F^T DG$$

תרגיל לבדוק את המסקנה השנייה.

נשים לב למקרה הפרטי $m = 1 : F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$, ואז

$$D(F \cdot G) = G \cdot DF + F \cdot DG$$

כעת, תהי $\gamma(t)$ מסילה רציפה עבורה $\gamma(0) = x_0, \dot{\gamma}(0) = h$. מה הוא ווקטור המהירות של המסילה $F(\gamma(t))$ בנקודה $t_0 = 0$, עבור $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$?

$$\frac{d}{dt} \big|_{t=0} F(\gamma(t)) = D_{\gamma(0)} F \dot{\gamma}(0)$$

כלומר למעשה

$$\overline{F(\dot{\gamma}(t))} = D_{\gamma(0)} F h$$

כלומר

$$DF : \dot{\gamma}(0) \rightarrow \overline{F(\dot{\gamma}(t))}(0)$$