

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

17 בינואר 2017

1 משפט מרכז המסה של פאפוס

נעבוד עם קואורדינטות גליליות: $(x, y, z) \leftrightarrow (r, \varphi, z)$, כאשר (r, φ) הן קואורדינטות פולריות במישור xy . ניקח גוף Ω במישור rz , ונסמן Ω את הגוף המתקבל מסיבוב Ω סביב ציר z . אזי

$$\begin{aligned}\text{Vol}(\hat{\Omega}) &= \int_{\hat{\Omega}} 1 \, dx dy dz = \int r \, dr d\varphi dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\Omega} r \, dr dz \right) d\varphi = \\ &= 2\pi \frac{\int_{\Omega} r \, dr dz}{\text{Vol}(\Omega)} \text{Vol}(\Omega) = 2\pi R_0 \text{Vol}(\Omega)\end{aligned}$$

כאשר R_0 היא קואורדינטת r של מרכז המסה של Ω .

2 אינטגרל לא אמיתי

נרצה לתת משמעות לגודל $\int_{\Omega} f$ כאשר f לא בהכרח אינטגרלית (למשל לא חסומה), או שהתחום לא בהכרח מדיד ז'ורדן (למשל לא חסום).

הגדרה 2.1 יהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום. תהי $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה. נסמן $\{\Omega_m\}$ מיצוי של Ω על ידי תחומים מדידים ז'ורדן. נניח כי f אינטגרלית על Ω_m , לכל m . אם קיים

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega_m} f$$

אזי הגבול נקרא אינטגרל לא אמיתי - בתנאי שאינו תלוי בבחירת המיצוי Ω_m .

דוגמאות

1.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

וניתן לבדוק כי זה נכון לכל מיצוי.

2.

$$\int_{-R}^R x \, dx = 0$$

$$\int_{-R}^{2R} x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-R}^{2R} = \frac{3R^2}{2}$$

ולכן לא קיים האינטגרל הלא אמיתי.

משפט 2.2 אם Ω מדידה ז'ורדן וכן f אינטגרלית על Ω , אזי לכל מיצוי Ω_m על ידי קבוצות פתוחות ומדידות ז'ורדן מתקיים

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega_m} f = \int_{\Omega} f$$

הוכחה: ברור כי

$$\int_{\Omega} f - \int_{\Omega_m} f = \int_{\Omega \setminus \Omega_m} f$$

נשים לב כי f חסומה על Ω . כמו כן, $\text{Vol}(\Omega \setminus \Omega_m) \rightarrow 0$, לפי למה מהשיעור שעבר. לכן

$$\left| \int_{\Omega} f - \int_{\Omega_m} f \right| = \left| \int_{\Omega \setminus \Omega_m} f \right| < C \text{Vol}(\Omega \setminus \Omega_m) \rightarrow 0$$

■

משפט 2.3 תהי $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$. יהיו Ω_m, Ω'_k שני מיצויים של Ω על ידי קבוצות פתוחות ומדידות ז'ורדן. נניח כי

$$A = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega_m} f$$

$$B = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega'_k} f$$

אזי בהכרח $A = B$.

הוכחה: נקבע k . כעת, $\Omega_m \cap \Omega'_k$ הוא מיצוי של Ω'_k . לכן

$$\int_{\Omega'_k} f = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega_m \cap \Omega'_k} f \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega_m} f = A$$

לכן נקבל כי גם

$$B = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega'_k} f \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega_m} f = A$$

■ באותה צורה בדיוק מראים כי $A \leq B$, ומקבלים שוויון.

דוגמא נחשב

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2} dx_1 \dots dx_n$$

ניקח $\Omega_m = \{x \mid |x_i| < m\}$ מיצוי של $\mathbb{R}^n$ על ידי קוביות. נקבל

$$\int_{\Omega_m} e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2} dx_1 \dots dx_n = \prod_{i=1}^n \int_{-m}^m e^{-\lambda_i x_i^2} dx_i$$

כעת

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega_m} e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2} dx_1 \dots dx_n = \prod_{i=1}^n \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-m}^m e^{-\lambda_i x_i^2} dx_i = \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\lambda_1 \dots \lambda_n}}$$

כעת נחשב

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x \rangle} dx$$

כאשר A מטריצה סימטרית ומוגדרת חיובית. כמובן,

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{i,j=1}^n A_{i,j} x_i x_j$$

לפני רגע התעסקנו על מטריצה אלכסונית, עם אלכסון $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. כעת נכליל. נראה שמתקיים

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x \rangle} dx = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}$$

נוכל ללכסן אורתוגונלית את A , כלומר נוכל לבצע החלפת משתנים $x = Ry$, כאשר R מטריצה אורתוגונלית. בקואורדינטות y , המטריצה תהיה אלכסונית, וכן $\det R = 1$, ולכן

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x \rangle} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2} dy = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_n}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}$$

משפט 2.4 יהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום. תהי $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, ונניח שמתקיים אי שוויון $|f(x)| \leq g(x)$ לכל $x \in \Omega$, וכן כי $\int_{\Omega} g$ קיים. אזי, אם $\int_{\Omega_m} f$ קיים אזי קיים הגבול

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega_m} f$$

והוא אינו תלוי במיצוי Ω_m .

הוכחה: יהי Ω_m מיצוי על ידי קבוצות מדידות זורדות. מניחים כי $\int_{\Omega_m} f$ קיים, ולכן גם $\int_{\Omega_m} |f|$ קיים. אזי

$$\int_{\Omega_m} |f| - \int_{\Omega_k} |f| = \int_{\Omega_m \setminus \Omega_k} |f| \leq \int_{\Omega_m \setminus \Omega_k} |g| = \int_{\Omega_m} g - \int_{\Omega_k} g$$

האינטגרל $\int_{\Omega} g$ מתכנס, ולכן נקבל כי אגף ימין קטן כרצוננו עבור m, k גדולים מספיק. לכן גם $\int_{\Omega} |f|$ מתכנס - ולא תלוי במיצוי בגלל שהפונקציה $|f|$ אי שלילית. כעת, נגדיר

$$\begin{aligned} f_+ &= \max(f(x), 0) \\ f_- &= \max(-f(x), 0) \end{aligned}$$

ואז מתקיים

$$\begin{aligned} f &= f_+ - f_- \\ |f| &= f_+ + f_- \end{aligned}$$

מתקיים

$$0 \leq f_+, f_- \leq |f| \leq g$$

■ ולכן האינטגרלים שלהן מתכנסים - כלומר גם האינטגרל של f .

דוגמא בהרבה מקרים משווים עם פונקציה $g(x) = |x|^{-\alpha}$, עבור $\alpha > 0$. הנקודות הבעייתיות שלה הן $x = 0, \infty$. נחלק לשני תחומים: $\Omega = B$, כדור היחידה של $\mathbb{R}^n$, וכן $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus B$. רוצים לדעת האם

$$\int_{\Omega} g$$

קיים. אנחנו נעבוד ראשית עם המקרה הראשון $\Omega = B$. ניקח ניצוי:

$$\begin{aligned}\Omega &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{\Omega}_k \\ \Omega_k &= \{2^{-k} \leq |x| \leq 2^{1-k}\} \\ \hat{\Omega}_k &= \bigcup_{i=1}^k \Omega_i\end{aligned}$$

זה מיצוי על ידי קבוצות מדידות ז'ורדן. כעת,

$$\int_{\hat{\Omega}_m} g = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_i} g$$

מתקיים בתוך Ω_i

$$\begin{aligned}2^{-k} &\leq |x| \leq 2^{1-k} \\ 2^{(k-1)\alpha} &\leq g(x) = |x|^{-\alpha} \leq 2^{k\alpha}\end{aligned}$$

כמו כן,

$$\text{Vol}(\Omega_k) = \kappa_n (2^{(1-k)n} - 2^{-kn}) = \kappa_n (2^n - 1) 2^{-kn}$$

לכן, למעשה מתקיים

$$\begin{aligned}\kappa_n (2^n - 1) 2^{(k-1)\alpha} 2^{-kn} &\leq \int_{\Omega_k} g \leq \kappa_n (2^n - 1) 2^{-kn} 2^{k\alpha} \\ C_2 2^{k(\alpha-n)} &\leq \int_{\Omega_k} g \leq C_1 2^{k(\alpha-n)}\end{aligned}$$

כעת

$$\int_{\hat{\Omega}_k} g = \sum_{i=1}^k \int_{\Omega_i} g$$

לכן כדי להוכיח קיום של האינטגרל, נשווה עם הטור הבא, שחוסם מלמעלה את גבול האינטגרלים:

$$C_1 \sum 2^{k(\alpha-n)}$$

כדי להוכיח אי קיום, משווים עם הטור הבא, שחוסם מלמטה את גבול האינטגרלים:

$$C_2 \sum 2^{k(\alpha-n)}$$

הטורים הללו מתכנסים אם ורק אם $\alpha < n$. לכן גם האינטגרל מתכנס במצב זה בלבד.