

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

22 בינואר 2017

אנחנו ממשיכים לנסות לחשב את $\int e^{-x^2}$. נגדיר $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$. ראינו בשיעור שעבר כי

$$\int_{B_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi (1 - e^{-R^2})$$

בעזרת החלפות משתנים לקואורדינטות פולריות. אם ניקח את הגבול כאשר $R \rightarrow \infty$ נקבל כי

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B_R} f = \pi$$

ולזה יהיה משמעות בהמשך כשנדבר על אינטגרל לא אמיתי.
נמשיך: מתקיים

$$B_R \subseteq C_R \subseteq B_{2R}$$

כאשר C_R היא קוביה בעלת אורך צלע R . ניקח גבול ונקבל כי

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f = \pi$$

אזי מתקיים

$$\int_{-R}^R \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} e^{-y^2} dx \right) dy = \int_{C_R} f(x, y) dx dy = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \int_{-R}^R e^{-y^2} dy = \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2$$

שוב ניקח גבול ונקבל כי

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

מהחלפת משתנים נקבל כי

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

1 מרכז מסה

בהינתן ווקטורים עם כיוונים $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots$ ומשקלים $m_1, m_2, \dots$ נגדיר את מרכז המסה שלהם

$$R = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

תהי $\rho(x)$ פונקציית צפיפות אי שלילית, ותהי Ω קבוצה מדידה ז'ורדן. הדוגמה הרגילה היא $\rho(x) = 1$ - המסה היא בדיוק $\text{Vol}(\Omega)$. נגדיר שוב מרכז מסה, הפעם על קבוצה:

$$R = \frac{\int_{\Omega} \vec{x} \rho(x) dx}{\int_{\Omega} \rho(x) dx}$$

טענה 1.1 תהי A הפיכה, וניקח טרנספורמליה אפינית $x \rightarrow Ax + b$. אז היא מעבירה מרכז מסה למרכז מסה.

הוכחה: נסמן $\vec{y} = A\vec{x} + b$. אזי

$$\begin{aligned} \frac{\int \vec{y} \rho(y) dy}{\int \rho(y) dy} &= \frac{\int (A\vec{x} + b) \rho(x) |A| dx}{\int \rho(x) |A| dx} = \frac{\int (A\vec{x} + b) \rho(x) dx}{\int \rho(x) dx} = \\ &= \frac{\int A\vec{x} \rho(x) dx + \int b \rho(x) dx}{\int \rho(x) dx} = A \left(\frac{\int \vec{x} \rho(x) dx}{\int \rho(x) dx} \right) + b \end{aligned}$$

■

דוגמא עבור $\rho(x) = 1$, מרכז המסה של משולש מלא עם הפנים שלו נמצא במרכז המשולש. ההוכחה לא מסובכת וחשובית מאוד.