

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

10 בינואר 2017

אנחנו נמצאים בעיצומה של הוכחת משפט החלפת המשתנים: אם $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ תחומים, כשבתוך U הקואורדינטות הן $x_1, \dots, x_n$ ובתוך V הן $y_1, \dots, y_n$, $\Omega \subseteq \bar{\Omega} \subseteq V$ קבוצה מדידה ז'ורדן, $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרלית על Ω , ודיפאומורפיזם $\varphi: U \rightarrow V$, אזי

$$\int_{\Omega} f = \int_{\varphi^{-1}(\Omega)} (f \circ \varphi) |\det \varphi'|$$

הוכחה: ראינו כבר את הלמה הבאה:

למה 0.1 אם $G \in \mathcal{J}, G \subseteq \bar{G} \subseteq U$ אזי

$$\text{Vol}(\varphi(G)) \leq \int_G |\det \varphi'(x)| dx$$

נראה למה נוספת:

למה 0.2 אם $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרלית ואי שלילית, אזי

$$\int_{\Omega} f \leq \int_{\varphi^{-1}(\Omega)} (f \circ \varphi) |\det \varphi'(x)| dx$$

הוכחה: נרחיב את f להיות 0 מחוץ לקבוצה Ω - כלומר נכפול אותה באינדיקטור. נגדיר P_{δ} חלוקה של $\mathbb{R}^n$ (עם הקואורדינטות $y_1, \dots, y_n$) לקוביות בעלות צלע δ . אזי

$$s(f\chi_{\Omega}, P_{\delta}) = \sum_{\square_i} m_{\square_i}(f\chi_{\Omega}) \text{Vol}(\square_i)$$

אם $\square_i$ יוצא אל מחוץ לקבוצה Ω האינפימום שם הוא 0. לכן נמשיך, ונפעיל את הלמה הקודמת עבור $G = \varphi^{-1}(\square_i)$.

$$\begin{aligned} s(f\chi_\Omega, P_\delta) &= \sum_{\square_i \subseteq \Omega_-^{(\delta)}} m_{\square_i}(f) \text{Vol}(\square_i) \leq \sum_{\square_i \subseteq \Omega_-^{(\delta)}} m_{\square_i}(f) \int_{\varphi^{-1}(\square_i)} |\det \varphi'(x)| dx \leq \\ &\leq \sum_{\square_i \subseteq \Omega_-^{(\delta)}} \int_{\varphi^{-1}(\square_i)} (f \circ \varphi) |\det \varphi'(x)| dx = \int_{\varphi^{-1}(\Omega_-^{(\delta)})} (f \circ \varphi) |\det \varphi'(x)| dx \leq \\ &\leq \int_{\varphi^{-1}(\Omega)} (f \circ \varphi) |\det \varphi'(x)| dx \end{aligned}$$

קיבלנו כי

$$s(f\chi_\Omega, P_\delta) \leq \int_{\varphi^{-1}(\Omega)} (f \circ \varphi) |\det \varphi'(x)| dx$$

כעת,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} s(f\chi_\Omega, P_\delta) = \int_{\Omega} f \leq \int_{\varphi^{-1}(\Omega)} (f \circ \varphi) |\det \varphi'(x)| dx$$

■

נצטרך עוד למה אחת, ואז נוכל להוכיח את המשפט.

למה 0.3 למעשה, אם $f \geq 0$ אזי בלמה הקודמת (ולכן גם בזו שלפניה) יש שוויון.

הוכחה: נסמן

$$g = (f \circ \varphi) |\det \varphi'(x)|$$

זו פונקציה $g : \varphi^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, והיא אי שלילית. היא גם אינטגרבילית. נרצה להפעיל עליה את הלמה הקודמת (וזו שלפניה) ולקבל את האי שוויון השני. הפעם הדיפאומורפיזם שנדבר עליו הוא φ^{-1} .

$$\int_{\varphi^{-1}(\Omega)} g \leq \int_{\Omega} (g \circ \varphi^{-1}) \left| \det (\varphi^{-1})'(y) \right| dy$$

מכאן,

$$\int_{\varphi^{-1}(\Omega)} (f \circ \varphi) |\det \varphi'(x)| dx \leq \int_{\Omega} f(y) \left| \det \varphi'(\varphi^{-1}(y)) \right| \left| \det (\varphi^{-1})'(y) \right| dy$$

נרצה לטעון כי

$$|\det \varphi'(\varphi^{-1}(y))| |\det (\varphi^{-1})'(y)| = 1$$

לפי כלל השרשרת:

$$\begin{aligned}\varphi \circ \varphi^{-1}(y) &= y \\ \varphi'(\varphi^{-1}(y)) \cdot (\varphi^{-1})'(y) &= \text{Id} \\ |\det \varphi'(\varphi^{-1}(y))| |\det (\varphi^{-1})'(y)| &= 1\end{aligned}$$

וכלן קיבלנו כי

$$\int_{\varphi^{-1}(\Omega)} (f \circ \varphi) |\det \varphi'(x)| \, dx \leq \int_{\Omega} f(y) \, dy$$

■

כעת נותר להוכיח את המשפט בהינתן שלושת הלמות. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית ולכן חסומה. ניקח $M > 0$ גדול מספיק כדי שיתקיים

$$f + M \geq 0$$

ואז יתקיים

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} (f + M) - \int_{\Omega} M$$

שתי הפונקציות הללו הן אי שליליות, ולכן מהלמה האחרונה נקבל:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} f &= \int_{\varphi^{-1}(\Omega)} ((f + M) \circ \varphi) |\det \varphi'(x)| \, dx - \int_{\varphi^{-1}(\Omega)} (M) |\det \varphi'(x)| \, dx = \\ &= \int_{\varphi^{-1}(\Omega)} (f \circ \varphi) |\det \varphi'(x)| \, dx\end{aligned}$$

■

כנדרש.

כעת נראה גרסה דומה אך אחרת של המשפט.

משפט 0.4 יהיו $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$, כאשר $U, V \in \mathcal{J}$ עם דיפאומורפיזם $\varphi: U \rightarrow V$. נניח כי $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית על V . נניח בנוסף כי $|\det \varphi'(x)|$ פונקציה חסומה על U . אזי

$$\int_V f = \int_U (f \circ \varphi) |\det \varphi'(x)| \, dx$$

איך נעשה את זה? ניקח את $V_-^{(\delta)}$ כאשר $\delta = \frac{1}{2^n}$, ונשתמש עליה במשפט בגרסה שראינו כבר. נחזור לדבר על זה אחרי שנדבר על הנושא הבא:

1 מיצוי (Exhaustion)

הגדרה 1.1 בהינתן קבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{R}^n$, מיצוי של U הוא סדרת קבוצות $U_i \subseteq U_{i+1}$ כך שמתקיים

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$$

במקרה הפרטי בו U פתוחה וחסומה, ניקח $\delta_n = \frac{1}{2^n}$, וניקח חלוקה P_{δ_n} של $\mathbb{R}^n$ כרגיל לקוביות עם צלע δ_n . נסמן

$$U_n = U_-^{(\delta_n)} = \{X \in P_{\delta_n} \mid X \subseteq \overline{X} \subseteq P_{\delta_n}\}$$

נקבל ככה U_n קומפקטיות עבורן

$$\text{Int}U_n \subseteq U_n \subseteq U$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = U$$

ולכן זהו מיצוי.

באותה שיטה אם U איננה חסומה ניתן לבנות מיצוי שלה

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Int}U_n$$

כאשר כל U_n היא אוסף סופי של תיבות ולכן מדידה ז'ורדן. כעת, נסמן

$$V_m = U \cap \{|x| \leq m\}$$

ואז

$$U = \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$$

כל פתוחה וסומה. לכן לפי השלב הקודם נוכל לבנות להן מיצוי:

$$V_1 = U_1^{(1)} \cup U_2^{(1)} \dots \cup U_m^{(1)} \cup \dots$$

$$V_2 = U_1^{(2)} \cup U_2^{(2)} \dots \cup U_m^{(2)} \cup \dots$$

$$\vdots$$

וכעת נוכל לבחור בתור הקבוצות במיצוי של U את האלכסונים:

$$\begin{aligned} & U_1^{(1)} \\ & U_1^{(2)} \cup U_2^{(1)} \\ & \vdots \end{aligned}$$

למה 1.2 תהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה. נניח כי $U_1, \dots, U_n$ מיצוי של U כאשר $U_i \in \mathcal{J}$. אזי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Vol}(U_n) = \text{Vol}(U)$$

הוכחה: ברור כי הנפח $\text{Vol}(U_n)$ מונוטוני עולה וחסום על ידי $\text{Vol}(U)$. חסומה, ולכן $\bar{U}$ קומפקט, ∂U מנפח אפס, כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיימות תיבות פתוחות $A_1, \dots, A_N$ כך שמתקיים

$$\begin{aligned} \partial U &\subseteq \bigcup_{i=1}^N A_i \\ \sum_{i=1}^N \text{Vol}(A_i) &< \varepsilon \end{aligned}$$

נגדיר

$$A = \bigcup_{i=1}^N A_i$$

זו קבוצה פתוחה, $A, U_1, U_2, \dots$ אוסף קבוצות פתוחות. כמו כן,

$$A \cup \bigcup U_i \supseteq \bar{U}$$

לכן קיים תת כיסוי סופי, אבל בגלל ההכלה של U_n נוכל למעשה לכתוב

$$A \cup U_m \supseteq \bar{U}$$

לכן

$$A \supseteq \bar{U} \setminus U_m$$

ולכן

$$\varepsilon > \text{Vol}(A) \geq \text{Vol}(U) - \text{Vol}(U_m)$$

■

בעזרת הלמה הזו, המשפט מקודם נובע ישירות ממשפט החלפת המשתנים: **הוכחה:** ניקח מיצוי $\{\Omega_n\}$ של V , כאשר

$$\Omega_n \subseteq \overline{\Omega_n} \subseteq V$$

■

ואז נגדיר

$$G_n = \varphi^{-1}(\Omega_n)$$

וזה יהיה מיצוי של U . עבור G_n, Ω_n משפט החלפת המשתנים תקף, ולכן

$$\int_{G_n} (f \circ \varphi) |\det \varphi'(x)| dx = \int_{\Omega_n} f(y) dy$$

כעת,

$$\begin{aligned} \int_U (f \circ \varphi) |\det \varphi'(x)| &= \int_{G_n} (f \circ \varphi) |\det \varphi'(x)| + \int_{U \setminus G_n} (f \circ \varphi) |\det \varphi'(x)| \rightarrow 0 \\ \int_V f &= \int_{\Omega_n} f + \int_{V \setminus \Omega_n} f \rightarrow 0 \end{aligned}$$

וכך נקבל את השוויון שנרצה.

דוגמאות

1. נפח של אליפסואיד: תהי A מטריצה מממד n , סימטרית ומוגדרת חיובית. נגדיר $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle Ax, x \rangle \leq 1\}$. אליפסואיד סטנדרטי:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1$$

כלומר עם המטריצה

$$A = \text{diag} \left(\frac{1}{a_1^2}, \dots, \frac{1}{a_n^2} \right)$$

נחשב את הנפח על ידי מציאת טרנספורמציה לינארית שתעביר אותו לכדור היחידה. ניקח

$$L(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{a_1}, \dots, \frac{x_n}{a_n} \right)$$

ברור שאכן $L : E \rightarrow B_1$ כעת,

$$\begin{aligned}\text{Vol}(L(E)) &= |\det L| \text{Vol} E \\ \kappa_n &= \left| \frac{1}{a_1 \cdots a_n} \right| \text{Vol} E \\ \text{Vol}(E) &= a_1 \cdots a_n \kappa_n\end{aligned}$$

כאשר κ_n הוא נפח הכדור ברדיוס 1 בתוך $\mathbb{R}^n$. נוכל לכתוב גם

$$\text{Vol}(E) = \frac{\kappa_n}{\sqrt{\det A}}$$

אם A מטריצה סימטרית ומוגדרת חיובית, אזי לפי המשפט הספקטרלי קיים בסיס אורתונורמלי של ווקטורים עצמיים של A . כלומר, אפשר לעבור מהקואורדינטות $x_1, \dots, x_n$ לקואורדינטות חדשות $y_1, \dots, y_n$ על ידי מטריצה אורתוגונלית, כך שבקואורדינטות החדשות, האליפסואיד יהיה סטנדרטי. הפעלת טרנספורמציה אורתוגונלית לא משנה נפח, ולכן נקבל שלכל אליפסואיד E שמוגדר על ידי מטריצה סימטרית ומוגדרת חיובית A מתקיים

$$\text{Vol}(E) = \frac{\kappa_n}{\sqrt{\det A}}$$

2. נרצה לחשב

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx$$

זה נקרא אינטגרל פואסון. למעשה נחשב משהו מעט שונה:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= e^{-x^2 - y^2} \\ \int_{B_R} f dx dy &=?\end{aligned}$$

נבצע החלפת משתנים, לקואורדינטות קוטביות. התחום V הוא B_R , והתחום U הוא התחום בקואורדינטות פולריות שבו

$$\begin{aligned}0 &\leq r \leq R \\ 0 &\leq \alpha \leq 2\pi\end{aligned}$$

זהו מלבן. הדיפאומורפיזם הוא

$$(r, \alpha) \rightarrow (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$$

הנגזרת היא r . לכן,

$$\int_{B_R} f = \int_U e^{-r^2} r \, dr d\alpha$$

לפי פוביני נוכל לחשב:

$$\begin{aligned} \int_U e^{-r^2} r &= 2\pi \int_0^R e^{-r^2} r \, dr = \pi \int_0^{R^2} e^{-z} \, dz = -\pi e^{-z} \Big|_0^{R^2} = \\ &= \pi (1 - e^{-R^2}) \end{aligned}$$