

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

22 בינואר 2017

נחזור להוכיח את הלמה שראינו בשיעור שעבר:

למה 0.1 יהיו G, U תחומים כאשר $G \subseteq \overline{G} \subseteq U$. נתון כי $G \in \mathcal{J}$, וכי φ דיפאומורפיזם. אזי

$$\text{Vol}(\varphi(G)) \leq \int_G |\det \varphi'(x)| \, dx$$

הוכחה: הוכחנו בעבר כי $\varphi(G) \in \mathcal{J}$. כעת יהי ψ דיפאומורפיזם מקוביה C עם צלע 2δ . נסמן

$$K = \sup_C \|\varphi'\|_\infty$$

נסמן את מרכזת של C בנקודה a . הראינו שמתקיים, עבור $x \in C$

$$\|\psi(a) - \psi(x)\|_\infty \leq \sup_C \|\psi'\|_\infty \|a - x\|_\infty \leq \delta K$$

אזי מתקיים

$$\text{Vol}(\psi(C)) \leq \left(\sup_C \|\psi'\|_\infty \right)^n \text{Vol}(C) = K^n \delta^n$$

כעת, תהי L טרנספורמציה לינארית הפיכה. נגדיר

$$\psi = L^{-1} \circ \varphi$$

אזי

$$\text{Vol}(L^{-1}\varphi(C)) \leq \left(\sup_C \|L^{-1} \circ \varphi'\|_\infty \right)^n \text{Vol}(C)$$

ראינו כי $\text{Vol}(LE) = |\det L| \text{Vol}(E)$ ולכן

$$\text{Vol}(L^{-1}\varphi(C)) = \text{Vol}(\varphi(C)) |\det(L^{-1})|$$

כלומר קיבלנו כי

$$\text{Vol}(\varphi(C)) \leq \sup_C \left\| (L^{-1}\varphi)' \right\|_\infty^n \text{Vol}(C) |\det L|$$

כעת, ניקח חלוקה P_δ של $\mathbb{R}^n$ לקוביות בעלות צלע δ . עבור $G \in \mathcal{J}$, נסמן כעת תמיד

$$\bigcup_{P_i \cap \overline{G} \neq \emptyset} P_i = \overline{G}_+^\delta$$

ואם δ קטן מספיק מתקיים $\overline{G}_+^\delta \subseteq U$.

טענה 0.2 לכל $\varepsilon > 0$ נוכל למצוא $N > 0$ עבורו

$$\|x - y\| < \frac{\delta}{N}, x, y \in \overline{G}_+^\delta \Rightarrow \|\varphi'^{-1}(x) \varphi'(y)\| < 1 + \varepsilon$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \left\| \varphi'(x)^{-1} \varphi'(y) \right\|_\infty - 1 &\leq \left\| \varphi'(x)^{-1} \varphi'(y) - I \right\|_\infty = \left\| \varphi'(x)^{-1} (\varphi'(y) - \varphi'(x)) \right\|_\infty \leq \\ &\leq \left\| \varphi'(x)^{-1} \right\|_\infty \|\varphi'(x) - \varphi'(y)\|_\infty \leq K \|\varphi'(x) - \varphi'(y)\|_\infty \end{aligned}$$

כאשר

$$K = \max_{\overline{G}_+^\delta} \|\varphi'^{-1}\|_\infty$$

לפי רציפות במידה שווה של φ' על $\overline{G}_+^\delta$ מתקיים שלכל $\varepsilon > 0$ ניתן למצוא $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in \overline{G}_+^\delta$ עם $\|x - y\|_\infty < \delta$ מתקיים $\|\varphi'(x) - \varphi'(y)\| < \frac{\varepsilon}{K}$. לכן בסך הכל נקבל כי הביטוי למעלה קטן מאשר ε . לכן סיימנו. ■

כעת, נעזר את החלוקה P_δ לחלוקה $P_{\frac{\delta}{N}}$, כאשר N בשליטתנו. ניקח C_i מתוך $P_{\frac{\delta}{N}}$ וניקח $a_i \in C_i \cap \overline{G}$ אקראיים. כעת, נשתמש במה שראינו כבר:

$$\text{Vol}(\varphi(C_i)) \leq |\det \varphi'(a_i)| \left(\sup_{C_i} \left\| \varphi'(a_i)^{-1} \varphi' \right\|_\infty \right)^n \text{Vol}(C_i) \leq |\det \varphi'(a_i)| (1 + \varepsilon)^n \text{Vol}(C_i)$$

כעת,

$$\text{Vol}(\varphi(G)) \leq \text{Vol} \left(\varphi \left(\overline{G}_+^{\frac{\delta}{N}} \right) \right) \leq (1 + \varepsilon)^n \sum_i |\det \varphi'(a_i)| \text{Vol}(C_i) \leq (1 + \varepsilon)^n S \left(|\det \varphi'(x) \chi_{\overline{G}}|, P_{\frac{\delta}{N}} \right)$$

ניקח גבול כאשר ונקבל

$$\text{Vol}(\varphi(G)) \leq (1 + \varepsilon)^n \int_G |\det \varphi'(x)| \, dx$$

■

וזה נכון לכל $\varepsilon > 0$. לכן נקבל את האי שוויון שבטענה.