

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

2 בנובמבר 2016

1 חזרה

הגדרה 1.1 יהי V מרחב ווקטורי. פונקציה $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ נקראת נורמה אם מתקיים:

1. $\|v\| \geq 0$ וכן $\|v\| = 0 \iff v = 0$.

2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n \quad \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.

3. אי שוויון המשולש: $\forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

כל מרחב ווקטורי ממשי סוף מימדי מקיים $V \cong \mathbb{R}^{\dim V}$. יש לנו מבנה של מכפלה פנימית:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

והיא מגדירה על $\mathbb{R}^n$ נורמה:

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

תרגיל הראו כי $|\cdot|$ מקיימת את הדרישות מנורמה.

דוגמאות נוספות לנורמות של $\mathbb{R}^n$:

1.

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

2.

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

3.

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

1.1 התכנסות

הגדרה 1.2 תהי $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ סדרת נקודות. נאמר שהיא מתכנסת אם מתקיימים התנאים הבאים (כולם שקולים):

1. התכנסות בכל רכיב: $x_n \rightarrow x$.

2. התכנסות בנורמה האוקלידית: $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

3. התכנסות בנורמה כלשהי: $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

משפט 1.3 בתוך $\mathbb{R}^d$, כל הנורמות שקולות, כלומר לכל $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ נורמות קיימים שני קבועים $c, C > 0$ כך שלכל וקטור $v \in \mathbb{R}^d$ מתקיים

$$c\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq C\|v\|_2$$

הוכחה: נוכיח שכל נורמה שקולה לנורמה האוקלידית. ראשית, נראה כי נורמה היא רציפה. ניקח סדרה $\{x_n\}$ שמתכנסת לנקודה x . כל x נוכל לפרוש על ידי הבסיס $e_1, \dots, e_n$ ולכתוב:

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{i=1}^d x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^d \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^d |x_i| \|e_i\| \leq \\ &\leq M \sum_{i=1}^d |x_i| \end{aligned}$$

כאשר

$$M = \max_i \|e_i\|$$

כעת, לכל $x \in \mathbb{R}^d$ מתקיים

$$\|x\| \leq M \sum_{i=1}^d |x_i| = M \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \right\rangle \leq M\sqrt{d}|x|$$

כעת נוכל לרשום

$$\|x_n - x\| \leq M\sqrt{d}|x_n - x| \rightarrow 0$$

ולכן קיבלנו רציפות של כל נורמה. כעת, נסמן את ספירת היחידה:

$$S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| = 1\}$$

קבוצה זו היא קומפקטית (סגורה וחסומה). ממשפט ווירשטראס, ומכך שנורמה היא רציפה, היא מקבלת ערך מקסימלי ומינימלי על ספירת היחידה (הקומפקטית). נסמנם m, M בהתאמה. לכן, לכל ווקטור v המקיים $|v| = 1$, מתקיים

$$m \leq \|v\| \leq M$$

מווקטור כלשהו, x , נוכל ליצור $w = \frac{x}{|x|}$ שמקיים $|w| = 1$. לכן מתקיים

$$\begin{aligned} m &\leq \|w\| \leq M \\ m &\leq \left\| \frac{x}{|x|} \right\| \leq M \\ m &\leq \frac{|x|}{|x|} \leq M \\ m|x| &\leq |x| \leq M \end{aligned}$$

■

וזו השקילות שרצינו.

הערה 1.4 במרחבים בעלי מימד אינסופי יש נורמות לא שקולות.

1.2 נורמות של מטריצות/אופרטורים

הערה 1.5 כל הנורמות על מרחב המטריצות שקולות.

הגדרה 1.6 תהי A מטריצה, כלומר העתקה לינארית. נגדיר את הנורמה האופרטורית של A להיות:

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \max_{|x|=1} |Ax|$$

תרגיל הוכיחו כי נורמה זו מקיימת את תכונות הנורמה.

מההגדרה, נובע שיש חסם עליון לערך מוחלט:

$$|Ax| \leq \|A\| |x|$$

נשים לב כי נורמה זו מולטיפליקטיבית:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

נרצה למצוא ביטוי נח יותר לנורמה:

$$\|A\| = \max_{|x|=1} \sqrt{\langle Ax, Ax \rangle} = \max_{|x|=1} \sqrt{\langle A^* Ax, x \rangle} = \max_{|y|=1} \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2}$$

זאת משום שהמטריצה A^*A היא תבנית ריבועית, שמאלגברה לינארית ידוע לנו שניתן ללכסן אותה - לעבור מערכת קואורדינטות כדי לקבל את שהראינו. נציין כי λ_i הם הערכים העצמיים של A^*A .

$$\|A\| = \max_{|y|=1} \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2} = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i}$$

נסמן

$$\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i = \lambda_{\max}$$

ונקבל כי

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}}$$

קיימות נורמות נוספות על מרחב המטריצות, למשל נורמת הילברט-שמידט:

$$\|A\|_{HS} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2} = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$$

תרגיל האם $\|\cdot\|_{HS}$ מולטיפליקטיבית?

בקורס זה אנחנו נדבר על העתקות (maps):

$$F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

כאשר $U \subseteq \mathbb{R}^n$ (הרבה פעמים תחום - קבוצה פתוחה וקשירה), כאשר מתקיים

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x \in U \mapsto y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

את הפונקציה F ניתן לכתוב בתור m פונקציות, $F_1, \dots, F_m$, שמקיימות

$$\begin{aligned} y_1 &= F_1(x) \\ &\vdots \\ y_n &= F_n(x) \end{aligned}$$

הגדרה 1.7 פונקציה F תיקרא דיפרנציאבילית בנקודה $x_0 \in U$ אם קיימת העתקה לינארית $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ המקיימת לכל h :

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = L(h) + o(|h|)$$

L נקראת הדיפרנציאל של F בנקודה x_0 . סימון:

$$L = D_{x_0} F = F_*$$

נבהיר את הסימון $o(|h|)$:

$$o(|h|) = |h| \cdot \alpha(h)$$

כאשר מתקיים

$$\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$$

לחילופין ניתן להגדיר $\alpha(h) = 0$, ואז לדרוש כי α רציפה בנקודה 0. כעת, נניח כי F דיפרנציאבילית בנקודה x_0 . נבחר $h = tv, t \in \mathbb{R}_+$, ונציב בהגדרה:

$$\begin{aligned} F(x_0 + tv) - F(x_0) &= L(tv) + \alpha(tv) \cdot t|v| \\ F(x_0 + tv) - F(x_0) &= tL(v) + \alpha(tv) \cdot t|v| \\ \frac{F(x_0 + tv) - F(x_0)}{t} &= L(v) + \alpha(tv) \cdot |v| \end{aligned}$$

הגדרה 1.8 הנגזרת לפי ווקטור כלשהו v של הפונקציה F בנקודה x_0 היא:

$$L_v F = \lim_{t \searrow 0} \frac{F(x_0 + tv) - F(x_0)}{t}$$

כעת מתקיים למעשה

$$L_v F = D_{x_0} F(v)$$

מסקנה 1.9 אם F דיפרנציאבילית בנקודה x_0 , אזי F גזירה לפי כל ווקטור v .

אם נבחר את v להיות וקטור בסיס e_i , נקבל

$$L_{e_i} F = \lim_{t \searrow 0} \frac{F(x_0 + te_i) - F(x_0)}{t} = \frac{\partial}{\partial x_i} F(x_0)$$

בסך הכל נוכל להסיק כי אם F דיפרנציאבילית בנקודה x_0 , כל הנגזרות החלקיות של F בנקודה x_0 קיימות. עם זאת, הגרירה בכיוון ההפוך לא נכונה - אפילו אם כל הנגזרות הכיווניות קיימות, לאו דווקא יש דיפרנציאביליות. נרצה לדון קצת יותר בדיפרנציאל עצמו. נניח כי F דיפרנציאבילית בנקודה x_0 . כיצד נתאר את המטריצה $D_{x_0}F$?
 התשובה פשוטה: העמודה מספר i של המטריצה היא למעשה הנגזרת החלקית מספר i , כלומר

$$D_{x_0}F = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)$$

כאשר $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$.