

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

3 בינואר 2017

1 החלפת משתנים

משפט 1.1 תהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ עם קואורדינטות $(x_1, \dots, x_n)$, ותהי $V \subseteq \mathbb{R}^n$ עם קואורדינטות $(y_1, \dots, y_n)$. נניח כי קיים דיפאומורפיזם $\varphi : U \rightarrow V$. תהי $\Omega \subseteq \bar{\Omega} \subseteq V$ ותהי $\mathcal{J} \ni \Omega \subseteq \bar{\Omega} \subseteq V$. אזי $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרלית על Ω . אזי $\varphi^{-1}(\Omega) \in \mathcal{J}$, $(f \circ \varphi) \cdot |\det \varphi'(x)|$ אינטגרלית על $\varphi^{-1}(\Omega)$, וכן

$$\int_{\varphi^{-1}(\Omega)} (f \circ \varphi)(x) |\det \varphi'(x)| dx = \int_{\Omega} f(y) dy$$

הוכחה: נחשוב על U עם הנורמה

$$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

כדור היחידה כאן הוא למעשה קובייה. אם $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ נסמן $\|L\|$ את הנורמה האופרטורית של L ביחס לנורמה $\|\cdot\|_{\infty}$. נפעיל את משפט ערך הביניים עבור $\|\cdot\|_{\infty}$: תהי $\gamma(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ גזירה ברציפות, ואז מתקיים

$$\gamma(1) - \gamma(0) = \int_0^1 \dot{\gamma}(t) dt$$

הכוונה בסימון הזה היא כמובן לכל רכיב בנפרד. נרצה לחשב:

$$\begin{aligned} \|\gamma(1) - \gamma(0)\|_{\infty} &= \left\| \int_0^1 \dot{\gamma}(t) dt \right\|_{\infty} \leq \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_{\infty} dt \leq \\ &\leq \max_{[0,1]} \|\dot{\gamma}(t)\|_{\infty} \end{aligned}$$

כעת, בהינתן $a, b \in U$ עבורן $[a, b] \subseteq U$, נגדיר $\gamma(t) = a + t(b - a)$. נרצה לחשב

$$\begin{aligned} \|\varphi(b) - \varphi(a)\|_\infty &= \|\varphi(\gamma(1)) - \varphi(\gamma(0))\|_\infty = \left\| \int_0^1 \frac{d}{dt} (\varphi(\gamma(t))) dt \right\|_\infty \leq \\ &\leq \int_0^1 \|\varphi'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)\|_\infty dt \leq \int_0^1 \|\varphi'(\gamma(t))\| \cdot \|\dot{\gamma}(t)\|_\infty dt = \\ &= \left(\int_0^1 \|\varphi'(\gamma(t))\| dt \right) \cdot \|b - a\|_\infty \leq \max_{[a,b]} \|\varphi'(x)\| \cdot \|b - a\|_\infty \end{aligned}$$

כעת, בהינתן תחום $V \subseteq \mathbb{R}^n$, והעתקה ψ גזירה ברציפות אל $\mathbb{R}^n$, אם $Z \subseteq V$ ממידה אפס אז גם $\psi(Z)$ ממידה אפס. מדוע זה נכון? ראינו שאם f מקיימת תנאי ליפשיץ, היא מעבירה קבוצות ממידה אפס לקבוצות ממידה אפס. בלי הגבלת הכלליות נוכל להניח כי V תחום חסום: אחרת נציג אותו כאיחוד בן מניה של תחומים $V \cap B_N$, כאשר B_N כדור, ולקחת $Z_N = Z \cap B_N$. לכן נניח כי V חסום. נרצה לבנות סדרת קומפקטים עולה כך שהאיחוד שלהם הוא V . ניקח P - חלוקה של $\mathbb{R}^n$ לקוביות עם אורכי צלעות $\frac{1}{2^N}$, ונסמן K_N את איחוד הקוביות מתוכן שנמצאות בתוך V . נקבל מה שרצינו. כל קומפקט K_N הוא איחוד סופי של קוביות, ובכל קוביה, ממשפט ערך הביניים Ω מקיימת עליו תנאי ליפשיץ. לכן ψ מעבירה את $Z \cap Q$ לקבוצה ממידה אפס, ולכן גם את כל Z .

חשוב לשים לב שאותו דבר לא נכון על נפח אפס (נעתיק את הכדור במישור לכל המישור, ציר x בתוך הכדור מנפח אפס, אבל יועתק לכל ציר x , שאינו חסום אפילו). עם זאת, אם $Z \subseteq \bar{Z} \subseteq V$ מנפח אפס, ψ דיפאומורפיזם, אז גם $\psi(Z)$ מנפח אפס. מדוע? $\text{Vol}(Z) = \text{Vol}(\bar{Z}) = 0$. $\bar{Z}$ קומפקטית, ולכן $\psi(\bar{Z})$ גם כן קומפקט, וממידה אפס - כי $\bar{Z}$ ממידה אפס (בפרט, כי היא מנפח אפס). לכן היא למעשה מנפח אפס: $\text{Vol}(\psi(\bar{Z})) = 0$. כעת $\psi(Z) \subseteq \psi(\bar{Z})$, ולכן גם מנפח אפס.

מכאן אם $\Omega \subseteq \bar{\Omega} \subseteq V$ מדידה זורדן, ψ דיפאומורפיזם מתוך V אל U , אזי $\psi(\Omega)$ גם מדידה זורדן - שכן $Z = \partial\Omega$ סגורה בתוך V ומנפח אפס, וכמו כן $\psi(\partial\Omega) = \partial(\psi(\Omega))$ כי ψ דיפאומורפיזם, כלומר $\psi(\Omega)$ מדידה זורדן.

לכן בסך הכל נקבל כי $\varphi(\Omega)$ מדידה, כמו שצריך במשפט. כעת, כדי להראות את האינטגרליות שרצינו, יש להראות חסימות וכן כי מידת נקודות אי הרציפות היא 0. $f \circ \psi$ חסומה, כי f חסומה. הדטרמיננטה היא רציפה, ולכן חסומה על $\varphi^{-1}(\bar{\Omega})$, שהיא קומפקטית. לכן הפונקציה שלנו חסומה. נותר לבדוק את נקודות אי הרציפות שלה: הן בהכרח או בשפה של $\varphi^{-1}(\Omega)$, או, אם הן בפנים שלה, הן בדיוק נקודות האי רציפות של f . השפה היא ממידה אפס, ואוסף נקודות האי רציפות של f גם כן, כי f אינטגרבילית - לכן הפונקציה שלנו אינטגרבילית. בשביל לראות את הטענה על האינטגרלים נצטרך כמה למות (לא נספיק השיעור).

למה 1.2 נניח כי G תחום עבורו $G \subseteq \bar{G} \subseteq U$, מדיד זורדן. אם $\varphi : U \rightarrow V$ דיפאומורפיזם אזי

$$\text{Vol}(\varphi(G)) \leq \int_G |\det \varphi'(x)| dx$$

הוכחה: נרצה לטעון כי קוביה מאורך צלע 2δ שממוקמת בנקודה a בתוך התחום של דיפאומורפיזם מועתקת על ידי ψ לתוך קוביה מאורך צלע $2K\delta$ עבור

$$K = \sup \|\psi'\|_\infty$$

כאשר הסופרימום הוא על פני הקוביה. מדוע?

$$\|\psi(x) - \psi(a)\|_\infty \leq \sup_{\square} \|\psi'\|_\infty \|x - a\|_\infty \leq K\delta$$

לכן מתקיים גם

$$\text{Vol}(\psi(\square)) \leq K^n \text{Vol}(\square)$$

■ המשך בשיעור הבא.

■

דוגמא ניקח במישור $\mathbb{R}^2$ את התחום Ω להיות $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. נרצה לחשב אינטגרל בתחום זה. נוכל לבצע החלפת משתנה לקואורדינטות פולריות:

$$\varphi(r, \alpha) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$$

כעת, $\varphi^{-1}(\Omega)$ הוא התחום בו $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. בקואורדינטות פולריות - זו תיבה!

$$\varphi'(r, \alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -r \sin \alpha \\ \sin \alpha & r \cos \alpha \end{pmatrix}$$

ולכן $\det(\varphi'(r, \alpha)) = r$. לכן נקבל כי

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 f(r \cos \alpha, r \sin \alpha) r \, dr \, d\alpha = \int_\Omega f(x, y) \, dx \, dy$$