

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

21 בינואר 2017

תזכורת סימנו בתור $\pi(v_1, \dots, v_n)$ את המקבילון הנפרש על ידי $v_1, \dots, v_n$. ראינו שהמקבילון מתאים למטריצת גראהם:

$$\text{Vol}(\pi) = \det(v_1 \ \dots \ v_n) = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j}} = \sqrt{\det G(v_1, \dots, v_n)}$$

כעת נראה נוסחה רקורסיבית עבור נפח π (נוכיח באינדוקציה הנוסחה שלמעלה). נגדיר את v_{n+1} להיות $w+h$, כאשר $w \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$ וכן $h \in (\text{span}(v_1, \dots, v_n))^\perp$. אז יש לנו שני מקבילונים, $\pi(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$, $\pi(v_1, \dots, v_n, h)$. לפי עיקרון קאוואליירי הם שווים נפח, כי כך חתך הוא שווה שטח. כעת, נותר לשים לב

$$\begin{aligned} \pi(v_1, \dots, v_n, h) &= \pi(v_1, \dots, v_n) \times [0, h] \\ \text{Vol}(\pi(v_1, \dots, v_n, h)) &= |h| \text{Vol}(\pi(v_1, \dots, v_n)) \end{aligned}$$

זה מאוד הגיוני - כשמחשבים שטח של מקבילית, כופלים את הגובה באורך הבסיס. אותו רעיון! נמשיך לחשב:

$$\begin{aligned} G(v_1, \dots, v_{n+1}) &= \begin{pmatrix} G(v_1, \dots, v_n) & (\langle v_i, w+h \rangle)_{i=1}^n \\ (\langle w+h, v_i \rangle)_{i=1}^n & \langle w+h, w+h \rangle \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} G(v_1, \dots, v_n) & (\langle v_i, w \rangle)_{i=1}^n \\ (\langle w, v_i \rangle)_{i=1}^n & |w|^2 + |h|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

לכן נקבל

$$\begin{aligned} \det G(v_1, \dots, v_{n+1}) &= \det \begin{pmatrix} G(v_1, \dots, v_n) & (\langle v_i, w \rangle)_{i=1}^n \\ (\langle w, v_i \rangle)_{i=1}^n & |w|^2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} G(v_1, \dots, v_n) & 0 \\ (\langle w, v_i \rangle)_{i=1}^n & |h|^2 \end{pmatrix} = \\ &= \det G(v_1, \dots, v_n, w) + |h|^2 \det G(v_1, \dots, v_n) \end{aligned}$$

נשים לב שבגלל שלקחנו $w \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$, מתקיים $\det(G(v_1, \dots, v_n, w)) = 0$ (תרגיל). לכן

$$\sqrt{\det G(v_1, \dots, v_{n+1})} = |h| \sqrt{\det G(v_1, \dots, v_n)}$$

זוהי אותו כלל כמו קודם.
נבדוק את מקרה הבסיס, $n = 1$:

$$\text{Vol}(\pi(v_1)) = |v_1| = \sqrt{\det G(v_1)} = \sqrt{\det(\langle v_1, v_1 \rangle)} = \sqrt{\det(|v_1|^2)} = \sqrt{|v_1|^2}$$

לכן הוכחנו את הנוסחה באינדוקציה.

1 החלפת משתנים באינטגרל

משפט 1.1 יהיו U, V תחומים בתוך $\mathbb{R}^n$, ויהי $\varphi : U \rightarrow V$ דיפאומורפיזם. נסמן $D\varphi = \varphi'$, וכן נניח כי $\det(\varphi'(x)) \neq 0$. יהי Ω תחום המקיים $\Omega \subseteq \bar{\Omega} \subseteq V$, וכן $\Omega \in \mathcal{J}$. תהי f פונקציה אינטגרלית על Ω . אזי $\varphi^{-1}(\Omega) \in \mathcal{J}$, וכן

$$\int_{\varphi^{-1}(\Omega)} f \circ \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{\Omega} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n$$

הסבר לא פורמלי: אם ניקח תיבה מאוד קטנה בתוך $\varphi^{-1}(\Omega)$ שהנפח שלה הוא $\Delta x_1 \dots \Delta x_n$, אז היא תועבר על ידי φ למקבילון שנפרש על ידי הווקטורים $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$ עם האורכים $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$. נפח של מקבילון הוא הדטרמיננטה של המטריצה עם הווקטורים האלה בתוכה, כלומר

$$\Delta x_1 \dots \Delta x_n \det \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right) = \det \varphi'(x) \cdot \Delta x_1 \dots \Delta x_n$$

ולכן סכום רימן של האינטגרל השמאל במשפט דומה לשל החלק הימני.