

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

27 בדצמבר 2016

דיברנו על משפט פוביני, בו הייתה לנו $f(x, y)$, כאשר $x \in A \subseteq \mathbb{R}^n$, $y \in B \subseteq \mathbb{R}^m$, שאינטגרבילית על $A \times B$. ראינו שכל פונקציה F עברה

$$F(x) \in \left\{ \left(\int_B f_x(y) dy \right)^*, \left(\int_B f_x(y) dy \right)_* \right\}$$

בכל נקודה x , היא אינטגרבילית על A ומקיימת

$$\int_A F = \int_{A \times B} f$$

בפרט נוכל להגדיר

$$F_1(x) = \left(\int_B f_x(y) dy \right)^*$$
$$F_2(x) = \left(\int_B f_x(y) dy \right)_*$$

ואז נגדיר

$$\varphi = F_2 - F_1 \geq 0$$

כמו כן,

$$\int_A \varphi = \int_A F_2 - \int_A F_1 = 0$$

ולכן $\varphi \stackrel{a.e}{=} 0$, ולכן למעשה קבוצת הנקודות x שעבורם

$$\left(\int_B f_x(y) dy \right)^* \neq \left(\int_B f_x(y) dy \right)_*$$

היא ממידה 0.

מסקנה 0.1 תהי $f(x, y) = \varphi(x) \psi(y)$, כאשר φ אינטגרבילית על A , ψ אינטגרבילית על B . אזי

$$\int_{A \times B} f = \int_A \varphi \cdot \int_B \psi$$

מסקנה 0.2 נניח כי $E_1 \subseteq \mathbb{R}^n, E_2 \subseteq \mathbb{R}^m$. נניח כי $E_1, E_2 \in \mathcal{J}$. אזי $E_1 \times E_2 \subseteq \mathcal{J}$ ומוקיים $\mathbb{R}^{n+m}$

$$\text{Vol}(E_1 \times E_2) = \text{Vol}(E_1) \cdot \text{Vol}(E_2)$$

מסקנה 0.3 בפועל, ניקח פונקציות $f_1, f_2 : Q \rightarrow \mathbb{R}$, עבורן $f_1 \leq f_2$, כאשר $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. ניקח קבוצה

$$\mathcal{J} \ni E \subseteq \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid f_1(x_1, \dots, x_n) \leq x_{n+1} \leq f_2(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \in Q\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

קבוצה זו היא בין שני גרפים של פונקציות. תהי $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית, אזי

$$\int_E g = \int_{x \in Q} dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} g dx_{n+1}$$

דוגמא ניקח את הקבוצה בין גרפי הפונקציות $f_1(x) = x^2, f_2(x) = x$. ניקח g מהקבוצה הזו ואז

$$\begin{aligned} \int_E g &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x g(x, y) dy \\ \int_E g &= \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} g(x, y) dx \end{aligned}$$

מסקנה 0.4 (פוביני לנפחים) תהי $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$. נגדיר

$$E_x = \{(x, y) \mid (x, y) \in E\}$$

זהו חתך בערך x ספציפי. כמו כן נגדיר באותו אופן:

$$E_y = \{(x, y) \mid (x, y) \in E\}$$

ממשפט פוביני נקבל

$$\begin{aligned}\text{Vol}(E) &= \int \chi_E dx dy = \int dy \int \chi_{E_y} dx = \\ &= \int \text{Vol}(E_y) dy\end{aligned}$$

הערה 0.5 משפט פוביני לא מבטיח כי לכל y , $E_y \in \mathcal{J}$. מובטח שקבוצת אותם y שבהם היא לא כזו היא ממידה 0. באופן כללי היינו צריכים לכתוב

$$\begin{aligned}\text{Vol}(E) &= \int \chi_E dx dy = \int dy \left(\int \chi_{E_y} dx \right)^* = \\ &= \int (\text{Vol}(E_y))^* dy\end{aligned}$$

מסקנה 0.6 (עיקרון קאוואליירי) יהיו $E_1 \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, $E_2 \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$. נניח כי לכל y מתקיים

$$\text{Vol}(E_1)_y = \text{Vol}(E_2)_y$$

אזי מתקיים

$$\text{Vol}(E_1) = \int \text{Vol}(E_1)_y dy = \int \text{Vol}(E_2)_y dy = \text{Vol}(E_2)$$

העקרון עובד גם אם נפחי החתכים משתווים פרט לקבוצה מנפח אפס. בתור דוגמה, חישבנו על הלוח נפח של כדור לפי עיקרון קאוואליירי.

מסקנה 0.7 תהי $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$. אם $\mathcal{J} \ni E$ אזי $\text{Vol}(E) = 0$ אם $\text{Vol}(E_y) = 0$ כמעט בכל מקום.

הוכחה:

$$\text{Vol}(E) = \int dy (\text{Vol} E_y)^*$$

לכן

$$(\text{Vol} E_y)^* \geq 0$$

והאינטגרל הוא 0, ולכן כמעט בכל מקום

$$(\text{Vol} E_y)^* = 0$$

■

כעת נחשב את נפחו של כדור במרחב $\mathbb{R}^n$, שנשמנו

$$B_n(R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}$$

נסמן

$$\text{Vol} B_n(R) = \kappa_n R^n$$

אנחנו יודעים כי $\kappa_1 = 2, \kappa_0 = 1$, ובשביל הגבוהים יותר מחשבים:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B_{n+1}(R)) &= \int_{-R}^R dx_{n+1} \kappa_n \left(\sqrt{R^2 - x_{n+1}^2} \right)^n = [x_{n+1} = R \sin t] = \\ &= \kappa_n R^{n+1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1} dt = \kappa_n R^{n+1} I_{n+1} \end{aligned}$$

נצמצם ונקבל

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n I_{n+1}$$

האינטגרלים I_n מקיימים כלל רקורסיבי:

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+2} dt = [\text{integration by parts}] = \\ &= (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2} \\ I_{n+2} &= \frac{n+1}{n+2} I_n \end{aligned}$$

בסך הכל, קל להוכיח באינדוקציה כי מתקיים

$$\begin{aligned} I_{2k} &= \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \pi \\ I_{2k+1} &= \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} 2 \\ \kappa_{2k} &= \frac{(2\pi)^k}{(2k)!!} = \frac{\pi^k}{k!} \\ \kappa_{2k+1} &= 2 \frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!} \end{aligned}$$

נעבור לדון בנפח של מקבילון. נניח שיש לנו $v_1, \dots, v_n$ ווקטורים בלתי תלויים, נוכל להתבונן במקבילון שהם פורשים:

$$\Pi = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mid (\lambda_i)_{i=1}^n \in [0, 1]^n \right\}$$

משפט 0.8 $\Pi \in \mathcal{J}$. אם נבחר בסיס אורתונורמלי $(e_j)_{j=1}^n$, ונכתוב

$$v_i = \sum_{j=1}^n v_{i,j} e_j$$

ואז מתקיים

$$\text{Vol} \Pi = \left| \det (v_{i,j})_{i,j=1}^n \right|$$

הוכחה: ראשית, נשים לב שאינינו תלויים בבחירת הבסיס האורתונורמלי - מטריצת המעבר בין שניים כאלה תהיה מדטרמיננטה ± 1 ולכן תכפול את הנפח פי 1. כעת, $\text{Vol}(\partial \Pi) = 0$, שכן השפה היא אוסף הצירופים $\sum \lambda_i v_i$ עבורם איזשהם מבין λ_i הם 0, 1, וזה מרחב מנפח אפס בהכרח. את הנוסחה נוכיח באינדוקציה. נניח את הנכונות עבור $\mathbb{R}^n$, ונוכיח עבור $\mathbb{R}^{n+1}$. נסמן

$$W = \text{Span} \{v_1, \dots, v_n\}$$

ניקח בסיס אורתונורמלי $e_1, \dots, e_n$ של W , ונשלים אותו על ידי וקטור היחידה e_{n+1} לבסיס של $\mathbb{R}^{n+1}$. כעת, נשתמש במשפט פוביני:

$$\text{Vol}(\Pi) = \int_0^{\langle v_{n+1}, e_{n+1} \rangle} dx_{n+1} \left(\int dx_1 \dots dx_n \text{Vol} \Pi_c \right)$$

מהנחת האינדוקציה

$$\text{Vol} \Pi_c = |\det(v_1, \dots, v_n)|$$

ולכן

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Pi) &= \text{Vol} \Pi_c \cdot \langle v_{n+1}, e_{n+1} \rangle = \left| \det \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} \right| \cdot \langle v_{n+1}, e_{n+1} \rangle = \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n & * \\ 0 & 0 & 0 & \langle v_{n+1}, e_{n+1} \rangle \end{pmatrix} \right| \end{aligned}$$

ולכן סיימנו.
נציג הוכחה אחרת.

טענה 0.9 הצגה קוטבית של מטריצה: בהינתן מטריצה L , קיימות מטריצה סימטרית מוגדרת חיובית R ומטריצה אורתוגונלית Φ עבורן

$$L = R\Phi$$

הוכחה: נראה מהי R :

$$\begin{aligned} L &= R\Phi \\ L^T &= \Phi^T R^T \\ LL^T &= R\Phi\Phi^T R^T = R^2 \\ R &= \sqrt{LL^T} \end{aligned}$$

כמוכן LL^T סימטרית ומוגדרת חיובית, לכן נלכסן אותה ונקבל כי R מוגדרת ביחידות. נקבל כי

$$\Phi = R^{-1}L$$

נרצה להראות שזה יוצא אורתוגונלי:

$$\Phi\Phi^T = R^{-1}LL^TR^{-T} = R^{-1}R^2R^{-1} = I$$

■

ולכן הוכחנו את הנדרש.

אם $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ לינארית, נתבונן בפונקציה

$$\nu(E) = \text{Vol}(LE)$$

ν אדיטיבית ואינווריאנטית להזזות. לכן לפי למה שראינו

$$\nu(E) = \nu\left(\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right) \text{Vol}(E)$$

נכתוב $L = R\Phi$ (הצגה קוטבית). Φ אורתוגונלית, ולכן שומרת על הנפח של כל קבוצה בעלת נפח. לכן נותר לחשב

$$\text{Vol}\left(R\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

לפי משפט מאלגברה לינארית, את R , שהיא סימטרית, ניתן ללכסן בבסיס אורתונורמלי $\{e_1, \dots, e_n\}$. זהו בסיס עצמי של R , ונותר לחשב את הנפח של קוביית היחידה ביחס אליו. קל לראות שגודל זה הוא מכפלת הערכים העצמיים, כלומר $\det R$. כלומר

$$\nu\left(\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \det R = |\det L|$$

כלומר קיבלנו נוסחה:

$$\text{Vol}(LE) = |\det L| \text{Vol}(E)$$

■