

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

29 בדצמבר 2016

1 משפט פוביני

ניזכר בניסוח המשפט:

משפט 1.1 תהי $f: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$, כאשר נסמן את הקואורדינטות הראשונות $x = (x_1, \dots, x_n)$ ואת האחרונות $y = (y_1, \dots, y_m)$. יהיו $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ תיבות, ונניח כי f אינטגרלית על $A \times B$. אזי לכל $x \in A$ נגדיר

$$F(x) \in \left[\left(\int_B f(x, y) \, dy \right)_*, \left(\int_B f(x, y) \, dy \right)^* \right]$$

נשים לב כי אם f_x אינטגרלית אזי הקטע הוא נקודה. כעת, מתקיימים הבאים:

1. F אינטגרלית על A , ומתקיים

$$\int_{A \times B} f = \int_A F$$

2. הקבוצה Z של הנקודות x עבורן f_x לא אינטגרלית היא זניחה.

3. באופן שקול, עבור

$$G(y) \in \left[\left(\int_A f(x, y) \, dx \right)_*, \left(\int_A f(x, y) \, dx \right)^* \right]$$

מתקיים

$$\int_{A \times B} f = \int_B G$$

הוכחה: תהי Q חלוקה של B , P חלוקה של A . אזי

$$T = P \times Q = \{P_i \times Q_j\}$$

חלוקה של $A \times B$. אזי

$$s(f, T) = \sum_{i,j} m_{P_i \times Q_j} \text{Vol}(P_i) \text{Vol}(Q_j) = \sum_i \text{Vol} P_i \sum_j m_{P_i \times Q_j} \text{Vol}(Q_j)$$

כמו כן, לכל $x \in P_i$ מתקיים

$$m_{P_i \times Q_j}(f) \leq m_{Q_j}(f_x)$$

לכן נקבל

$$\sum_j m_{P_i \times Q_j} \text{Vol}(Q_j) \leq \sum_j m_{Q_j}(f_x) \text{Vol}(Q_j) = s(f_x, Q) = \left(\int_B f_x(y) dy \right)_* \leq F(x)$$

זה נכון לכל $x \in P_i$, ולכן בפרט עבור האינפימום:

$$m_{P_i}(F) \geq \sum_j m_{P_i \times Q_j} \text{Vol}(Q_j)$$

לכן נקבל

$$s(f, T) = \sum_{i,j} m_{P_i \times Q_j} \text{Vol}(Q_j) \text{Vol}(P_i) \leq \sum_i m_{P_i}(F) \text{Vol}(P_i) = s(F, P)$$

לכן $s(f, T) \leq s(F, P)$. באותו אופן, נתחיל עם $S(f, T)$ ולקבל באותה צורה בדיוק $S(f, T) \geq S(F, P)$. בסהך הכל:

$$s(f, T) \leq s(F, P) \leq S(F, P) \leq S(f, T)$$

כעת, f אינטגרלית ולכן ההפרש בין האיברים הקיצוניים קטן כרצוננו:

$$I - \varepsilon \leq s(f, T) \leq s(F, P) \leq S(F, P) \leq S(f, T) \leq I + \varepsilon$$

לכן כמו שרצינו

$$\int_A F = I$$

■

מסקנה 1.2 תהי

$$f(x, y) = \varphi(x) \psi(y)$$

כאשר φ אינטגרבילית על $A \subseteq \mathbb{R}^n$, ψ אינטגרבילית על $B \subseteq \mathbb{R}^m$. אזי f אינטגרבילית על $A \times B$ ומתקיים

$$\int_{A \times B} f = \int_A \varphi \int_B \psi$$

הוכחה: מתקיים

$$B_f \subseteq (B_\varphi \times B) \cup (A \times B_\psi)$$

וזו קבוצה ממידה אפס, לכן f אינטגרבילית. ממשפט פוביני:

$$F(x) = \int_B f(x, y) dy = \int_B \varphi(x) \psi(y) dy = \varphi(x) \cdot \int_B \psi$$

וכעת אנחנו יודעים כי

$$\int_{A \times B} f = \int_A F(x) dx = \int_A \left(\varphi(x) \cdot \int_B \psi \right) dx = \int_A \varphi \cdot \int_B \psi$$

■

כנדרש.

הערה 1.3 בדוגמה משיעורי הבית, עבור הפונקציה האינטגרבילית

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \vee y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

עבור $(x, y) \in [0, 1]^2$, אם x אי רציונאלי, f_x אינטרבילית, ואם x רציונאלי היא לא (כמו פונקציית דיריכלה אבל בגובה אחר). לכן הקבוצה Z מהמשפט היא ממידה אפס אבל לא מנפח אפס.

הערה 1.4 אם עבור f כלשהי Z מנפח אפס (למשל סופית) אז במשפט פוביני אפשר להגדיר את $F(x)$ כרצוננו בכל $x \in Z$, שכן ניתן לשנות את ערך הפונקציה בקבוצה מנפח אפס מבלי לשנות את ערך האינטגרל. לעומת זאת, ההערה הקודמת מראה שאם Z רק ממידה אפס אז לא נוכל לקחת ערכים של F מחוץ לקטע הנתון במשפט. אם ניקח במקום $F(x) \in [0, \frac{1}{q}]$ בנקודות רציונאליות $F(x) = 1$, אז המשפט יפסיק להתקיים כי אז F לא תהיה אינטגרבילית יותר.