

חשבון דיפרנציאלי ואיטגרלי 3

© ארזים

20 בדצמבר 2016

1 נפח ומדידות ז'ורדן

ראינו בשיעור שעבר שכדור B_R במרחב $\mathbb{R}^n$ הוא מדיד ז'ורדן (בעל נפח), כלומר $B_R \in \mathcal{J}$.

טענה 1.1 תהי $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרלית רימן וחיובית ממש. אזי

$$\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid 0 \leq x_{n+1} \leq f(x_1, \dots, x_n)\} \in \mathcal{J}$$

הוכחה: תהי P חלוקה של Q . ניזכר בסכומי דרבו של f לפי P :

$$S(f, P) = \sum_j M_j \text{Vol} P_j$$

$$s(f, P) = \sum_j m_j \text{Vol} P_j$$

נגדיר Γ_- להיות אוסף התיבות במרחב $\mathbb{R}^{n+1}$ כך שבקואורדינטות הרשונות יש נקודה מתוך P_j , והקואורדינטה האחרונה מקיימת $0 \leq x_{n+1} \leq m_j$. באתה צורה נגדיר Γ_+ עם M_j .

לפי ההגדרה $\Gamma_- \subseteq \Gamma \subseteq \Gamma_+$, וכן $\text{Vol}(\Gamma_-) = s(f, P)$, $\text{Vol}(\Gamma_+) = S(f, P)$. f אינטגרלית, ולכן $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$ לכל ε על ידי בחירת P מתאימה. נשים לב שההפרש הזה הוא בדיוק הנפח של התיבות המכסות את $\partial\Gamma$, כלומר $\text{Vol}(\partial\Gamma) = 0$, ולכן $\Gamma \in \mathcal{J}$.

כדי לחשב את הנפח של Γ נחשב ונקבל

$$\begin{aligned} \text{Vol} \Gamma_- &\leq \text{Vol} \Gamma \leq \text{Vol} \Gamma_+ \\ s(f, P) &\leq \text{Vol} \Gamma \leq S(f, P) \\ I_*(f) &\leq \text{Vol} \Gamma \leq I^*(f) \end{aligned}$$

אבל f אינטגרלית, ולכן $I^*(f) = I_*(f)$, כלומר

$$\text{Vol} \Gamma = \int_Q f$$

■

הערה 1.2 למעשה הטענה עובדת גם בכיוון השני - אם $\Gamma \in \mathcal{J}$ אזי f אינטגרלית רימן.

תרגילים הוכיחו את הכיוון ההפוך, ותארו את $\partial\Gamma$.

משפט 1.3 תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$. נתבונן בקבוצה $E + c = \{e + c \mid e \in E\}$. אזי $\text{Vol}(E) = \text{Vol}(E + c)$.

הוכחה: מתקיים

$$\chi_{E+c}(x) = \chi_E(x - c)$$

כל פונקציה אינטגרלית על Q שניקח, שנסמן f , תגדיר פונקציה

$$f_c(x) = f(x - c)$$

■ שהיא אינטגרלית על $Q + c$. בפרט עבור האינדיקטורים, וסיימנו.

משפט 1.4 תהי $A \in O(m)$ מטריצה אורתוגונלית. אזי לכל $E \in \mathcal{J}$ מתקיים $AE \in \mathcal{J}$, $\text{Vol}(AE) = \text{Vol}(E)$.

הוכחה: נשתמש בלמה. נסמן $\boxed{a}$ את קוביה בעלת צלע a .

למה 1.5 תהי $\nu : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}_+$ המקיימת:

1. לכל $E \in \mathcal{J}$ ולכל $c \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $\nu(E + c) = \nu(E)$.

2. לכל $E_1, \dots, E_n$, כאשר $E_i \cap E_j = \emptyset$ לכל $i \neq j$, אזי

$$\sum_{i=1}^n \nu(E_i) = \nu(E_1 \cup \dots \cup E_n)$$

אזי לכל $E \in \mathcal{J}$ מתקיים $\nu(E) = \nu(\boxed{1}) \cdot \text{Vol}(E)$.

הוכחה: על ידי חלוקת קוביית היחידה לקוביות קטנות יותר, נוכל לקבל

$$\nu(\boxed{1}) = 2^{mn} \nu(\boxed{2^{-m}})$$

בגלל התכונות של ν . לכן הוכחנו את הנדרש עבור תיבות בעלות צלע 2^{-m} .
 כעת לקוביה כללית Q , נסמן בתור Q_- את אוסף הקוביות בעלות צלע 2^{-m} שמוכלות בתוך Q , ובתור Q_+ את אוסף הקוביות בעלות צלע 2^{-m} שנחתכות עם Q . לפי האדיטיביות של ν נקבל

$$\nu(Q_+) = \nu(\boxed{1}) \text{Vol}(Q_+)$$

$$\nu(Q_-) = \nu(\boxed{1}) \text{Vol}(Q_-)$$

לכן מתקיים אי שוויון

$$\nu(Q_-) \leq \nu(Q) \leq \nu(Q_+)$$

אי שוויון כזה מתקיים גם עבור הנפח:

$$\text{Vol}(Q_-) \leq \text{Vol}(Q) \leq \text{Vol}(Q_+)$$

לכן נקבל

$$\begin{aligned} \nu(Q_-) - \nu\left(\boxed{1}\right) \text{Vol}(Q_+) &\leq \nu(Q) - \nu\left(\boxed{1}\right) \text{Vol}(Q) \leq \nu(Q_+) - \nu\left(\boxed{1}\right) \text{Vol}(Q_-) \\ \nu\left(\boxed{1}\right) (\text{Vol}Q_- - \text{Vol}Q_+) &\leq \nu(Q) - \nu\left(\boxed{1}\right) \text{Vol}(Q) \leq \nu\left(\boxed{1}\right) (\text{Vol}Q_+ - \text{Vol}Q_-) \end{aligned}$$

$Q \in \mathcal{J}$, ולכן על ידי בחירת m גדול מספיק, נוכל לקבל לכל $\varepsilon > 0$ את האי שוויון
 $0 \leq \text{Vol}Q_+ - \text{Vol}Q_- < \varepsilon$ לכן נקבל

$$\begin{aligned} \nu(Q) - \nu\left(\boxed{1}\right) \text{Vol}(Q) &= 0 \\ \nu\left(\boxed{1}\right) \text{Vol}(Q) &= \nu(Q) \end{aligned}$$

נותר להראות עבור כל קבוצת ז'ורדן $E \in \mathcal{J}$. ההוכחה זהה לחלוטין, רק שכעת ניתן לחלק לכל תיבה שרוצים. ■

כעת, נוכיח עבור מטריצה כללית A כי אם $E \in \mathcal{J}$ אזי $AE \in \mathcal{J}$.
אם A לא הפיכה, התמונה שלה היא תת מרחב של $\mathbb{R}^m$. לכן כל קבוצה חסומה בתוך $\mathbb{R}^m$ נמצאת בתת מרחב בעל נפח אפס.
אם A הפיכה, אזי A היא הומיאומורפיזם. לכן $\partial(AE) = A\partial(E)$. תהי $E \in \mathcal{J}$, אזי $\text{Vol}(\partial E) = 0$. כעת, A לינארית ולכן ליפשיץ, ולכן $\text{Vol}(A(\partial E)) = 0$, כלומר $\text{Vol}(\partial(AE)) = 0$, ולכן $AE \in \mathcal{J}$.
כעת נחזור לעבוד עם $A \in O(m)$. נגדיר $\nu(E) = \text{Vol}(AE)$. נשים לב שהפונקציה הזו היא $\nu: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}_+$ כמו כן,

$$\nu(E + c) = \text{Vol}(A(E + c)) = \text{Vol}(AE + Ac) = \text{Vol}(AE) = \nu(E)$$

וכן, בהינתן $E_1, \dots, E_n$ זרות בזוגות, גם $AE_1, \dots, AE_n$ זרות בזוגות, ולכן

$$\begin{aligned} \nu(E_1 \cup \dots \cup E_n) &= \text{Vol}(A(E_1 \cup \dots \cup E_n)) = \text{Vol}(AE_1 \cup \dots \cup AE_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Vol}(AE_i) = \sum_{i=1}^n \nu(E_i) \end{aligned}$$

לכן ν מקיימת את תנאי הלמה, ולכן

$$\text{Vol}(AE) = \nu(E) = \nu(\boxed{1}) \cdot \text{Vol}(E) = \text{Vol}(A\boxed{1}) \cdot \text{Vol}(E)$$

כעת, $A \in O(m)$, כלומר $|Ax| = |x|$ לכל $x \in \mathbb{R}^m$. נגדיר

$$B = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| \leq 1\}$$

ראינו כי $B \in \mathcal{J}$, ומתקיים גם $A(B) = B$. נבחר $E = B$ ונקבל $\text{Vol}(AE) = \text{Vol}(B) \neq 0$, שכן $\text{Vol}(A\boxed{1}) = 1$ ולכן בהכרח $\text{Vol}(E) = \text{Vol}(A\boxed{1}) \text{Vol}(E)$.
 סיימנו. ■

1.1 משפט פוביני

נרצה לדון באינטגרל חוזר:

$$\int_Q f = \int_Q f \, dx \, dy \stackrel{?}{=} \int_{[a_1, b_1]} \left(\int_{[a_2, b_2]} f(x, t) \, dy \right) dx$$

נסמן נקודות במרחב $\mathbb{R}^n$ בתור $x = (x_1, \dots, x_n)$, ונקודות במרחב $\mathbb{R}^m$ בתור $y = (y_1, \dots, y_m)$. ניקח $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^m$ תיבות, אזי $A \times B$ תיבה בתוך $\mathbb{R}^{n+m}$. תהי $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה. בהינתן $x \in A$ נגדיר $f_x(y) = f(x, y)$, ובהינתן $y \in B$ נגדיר $f_y(x) = f(x, y)$. נגדיר פונקציה:

$$F(x) = c, c \in [I_*(f_x), I^*(f_x)]$$

אם עבור x מסויים f_x אינטגרלית על B , אזי

$$F(x) = \int_B f_x(y) \, dy$$

זה ברור.

משפט 1.6 (משפט פוביני) בסימונים שלמעלה, אם f אינטגרלית על $A \times B$, אזי:

1. F אינטגרלית על A ומתקיים

$$\int_{A \times B} f = \int_B F$$

2. בפרט, תמיד ניתן לבחור את c בהגדרת $F(x)$ להיות קצה מסויים של הקטע:

$$\int_{A \times B} f = \int_A I^*(f_x) = \int_A I_*(f_x)$$

סימון אחר:

$$\int_{A \times B} f = \int_A \left(\int_B f_x \right)_* = \int_A \left(\int_B f_x \right)^*$$

3. למעשה, קבוצת אותן נקודות $x \in A$ שעבורן f_x איננה אינטגרלית על B היא קבוצה ממידה 0.

את ההוכחה נראה בשיעור הבא.

דוגמאות

1. ניקח $A = [0, 1] = B$, $f(x, y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f \, dy \right) dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f \, dx \right) dy = -\frac{1}{2}$$

איך זה מסתדר? f לא חסומה על $[0, 1] \times [0, 1]$, למשל בסביבת 0, ולכן לא אינטגרלית עליה.

2. כתרגיל, הראו שקיימת קבוצה $Z \subseteq \mathbb{R}^2$ שצפופה במישור, כך שעל כל קו ישר אנכי יש לא יותר מנקודה אחת של Z , ואותו דבר על כל קו אופקי. נגדיר

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in Z \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ואותה נגדיר על $Z \cap [0, 1]^2$. f איננה אינטגרלית, שכן סכום דרבו העליון הוא תמיד 1, והתחתון הוא תמיד 0 (Z צפופה). עם זאת,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int f(x, y) \, dy = 0$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \int f(x, y) \, dx = 0$$

ולכן מתקיים

$$\int \left(\int f(x, y) \, dx \right) dy = \int \left(\int f(x, y) \, dy \right) dx = 0$$